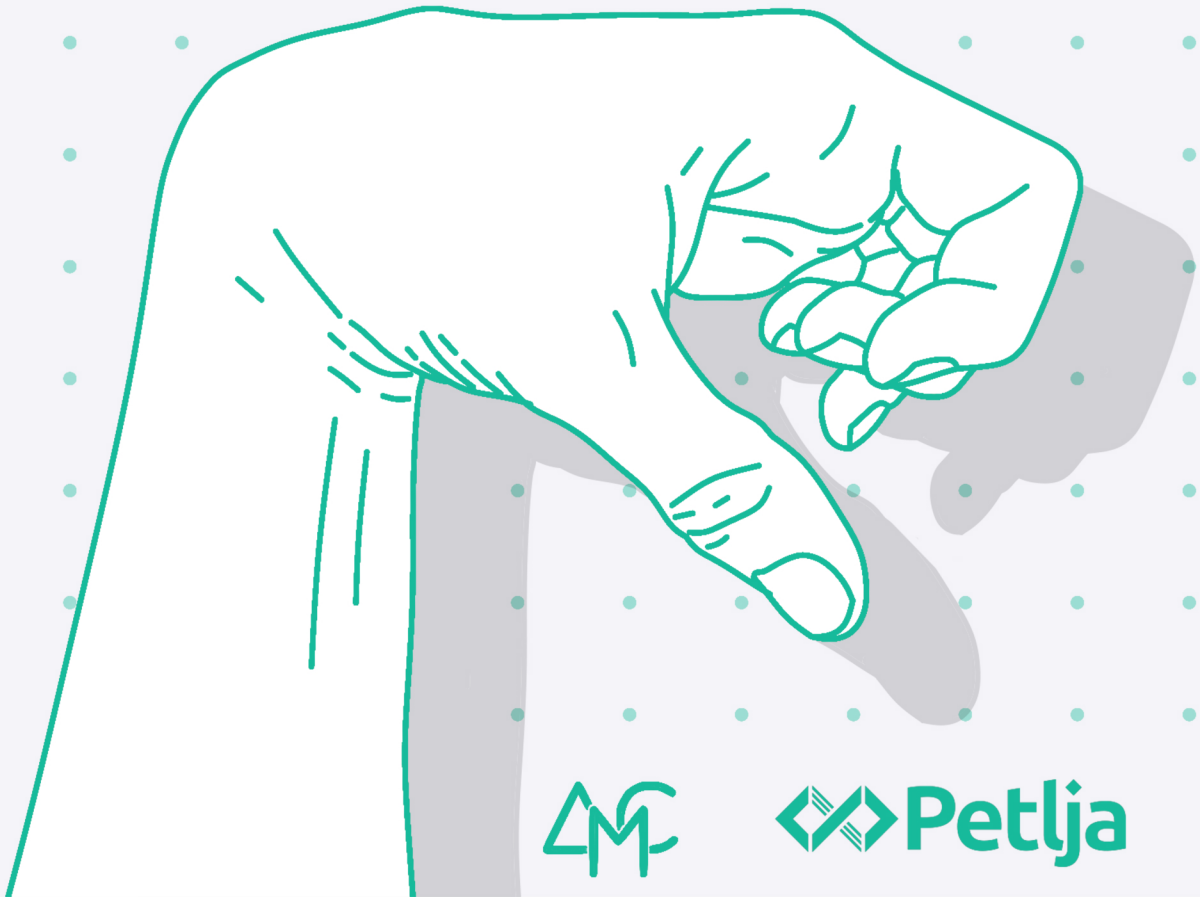
Методичка збирка задатака из основа програмирања - Python



Petlja

Друштво математичара Србије
Фондација Петља

Методичка збирка задатака из основа програмирања — Python

Београд, 2019.

Аутори:

Филип Марић, професор на Математичком факултету у Београду
Нина Алимпић, професор у Математичкој гимназији у Београду
Небојша Васиљевић, фондација „Петља”
Милан Вуџелија, фондација „Петља”
Душа Вуковић, професор у Математичкој гимназији у Београду
Мијодраг Ђуришић, професор у Математичкој гимназији у Београду
Весна Маринковић, доцент на Математичком факултету у Београду
Станка Матковић, професор у Математичкој гимназији у Београду
Јелена Хаџи-Пурић, асистент на Математичком факултету у Београду
Милан Чабаркапа, професор у Математичкој гимназији у Београду

Методичка збирка алгоритамских задатака са решењима — Python
основни ниво

Издавачи: Друштво математичара Србије и Фондација „Петља”
За издвача: *др Војислав Андрић*

Обрада текста и илустрације: *аутори*, Дизајн корица: *Иван Авдић*

Издање: 1.1 (електронско)

Садржај

Глава 1

Предговор

1.1 О збирци

Ова збирка се бави елементарним алгоритмима и погодна је за почетни ниво учења програмирања у гимназијама, стручним школама и на факултетима, као и почетни ниво припреме за такмичења из програмирања.

Потребно математичко предзнање не прелази ниво основне школе, а математички појмови и формуле које се користе у решењима су резимирани пре сваког поглавља. Са друге стране, постоје математички појмови који се недовољно разрађују у класичној настави математике, а који су важни у програмирању (и рачунарству уопште), па су они кроз ову збирку нешто детаљније разрађени. Такве су, на пример, област целобројног дељења, модуларне аритметике, позиционог записа бројева и слично.

Излагање је систематизовано по коришћеним идејама (алгоритмима), пратећи аналогије између тих идеја и постепено повећавајући сложеност. Технички детаљи који одвлаче пажњу од идеја су одложени колико је могуће, да би се олакшало савладавање основних алгоритама и што пре почело решавање задатака. У складу са тиме, програмски језик Пајтон (Python), на коме су написана сва решења, уводи се само у мери која је довољна за решавање постављених задатака (преглед језика је у другом плану). На пример, у већем делу збирке бројчани подаци се учитавају и исписују по један у реду (а парсирање улаза и форматирање излаза се појављују касније); променљивама се вредност додељује само једанпут у програму (све до итеративних алгоритама), итд. Када су основне технике већ усвојене, у једној групи задатака се приказује употреба библиотечких колекција и функција која значајно поједностављује запис решења, а читаоци се подстичу да користе ове могућности језика Преглед могућности језика Пајтон и његових уграђених функција и најпознатијих модула није исцрпан, већ се приказују само изабрани елементи који су довољно једноставни за почетника, а могу значајно да олакшају решавање задатака.

Програмски интерфејс (енгл. API) у свим задацима се своди на учитавање података са стандардног улаза и исписивање на стандардни излаз. Претпоставља се да су сви улазни подаци исправно задати у описаном формату и не врши се провера коректности улаза. Тиме је фокус јасно стављен на моделовање проблема и затим разраду и реализацију алгоритма, што сматрамо кључним вештинама при бављењу програмирањем, а што би могло бити запостављено прераним учењем богатијег корисничког интерфејса (нпр. графичког). Програми какви се користе у овој збирци (тзв. конзолни програми) врло лако могу да буду аутоматски покренути, па их је лако аутоматски тестирати (што је омогућено за све задатке на порталу `https://petlja.org`), а имају и значајну примену при аутоматској обради великих количина података.

По завршетку збирке, читалац може наставити да се бави програмирањем на различите начине. Један од могућих наставака је изучавање сложености алгоритама и налажење ефикасних решења проблема. Задаци у овој збирци нису довољно захтевни да би та, иначе важна тема дошла до изражаја при њиховом решавању. Зато смо задацима у којима се траже посебно оптимизовани алгоритми посветили други том збирке.

1.2 Препоруке читаоцу који почиње да учи програмирање

Збирка представља штампану верзију збирке, доступне на порталу `https://petlja.org`. Саветујемо ти да пре читања решења сваки задатак покушаш самостално да решиш и своја решења аутоматски тестираш у

онлајн издању збирке. Знамо да може да буде тешко, поготово на почетку. Немој да одустанеш. Када се осећаш несигурно и не знаш како да напишеш програм, покушај да себи помогнеш постављањем ових питања:

- Шта је дато, а шта се тражи?
- Можеш ли да решиш задатак без рачунара на датом примеру?
- Можеш ли да наведеш кораке којима се долази до резултата?
- Постоји ли пример који се другачије решава?
- Да ли ти је јасан поступак добијања тражених величина у сваком могућем случају?
- Можеш ли да изразиш тај поступак на начин који се лако претвара у наредбе програмског језика?

Дешаваће се да напишеш програм, а да при извршавању не добијаш резултате које очекујеш. Када у таквој ситуацији немаш идеју зашто програм не даје добар резултат, покушај следеће кораке:

- Пронађи што једноставније улазне податке за које твој програм не ради исправно.
- Можеш ли за те улазне податке да решиш задатак без рачунара (ручно)?
- Сада замисли да си рачунар који је добио твој програм. Извршавај наредбу по наредбу. Ако ти је лакше, пиши на папиру вредности променљивих током извршавања програма, тако да не мораш да их памтиш (овај корак можеш да изведеш и лакше ако умеш да на рачунару извршаваш програм корак по корак или део по део, и пратиш вредности променљивих).
- Ако је програм велики, или ти је тешко да пратиш како би рачунар извршавао поједине наредбе, уместо претходног корака додај привремено на нека места у програму наредбе за исписивање вредности променљивих (касније их обриши).
- Упореди оно што добијаш праћењем рада програма (који год начин праћења рада програма да одабереш) са тачним међурезултатима и резултатима добијеним ручним решавањем.
- Да ли сада разумеш зашто програм не решава задатак исправно?
- Можеш ли сада то да поправиш?

Ако после озбиљног покушаја закључиш да ипак не умеш да решиш задатак, погледај решење и потруди се да га разумеш. Врло је вероватно да ће ти то помоћи при решавању следећег задатка.

Било би добро да прочиташ решење и када успешно решиш задатак, јер и тада можеш да научиш нешто ново ако је дато решење суштински другачије од оног до кога ти дођеш.

У Београду, јун 2019. Аутори

Глава 2

Аритметика

У овој глави приказаћемо како се могу решавати разни задаци у којима се врше основна аритметичка израчунавања. Такви задаци се обично срећу у математици, физици и хемији, а коришћење рачунара олакшава њихово решавање, јер је потребно само записати формуле на основу којих се долази до решења, док је рачунар тај који преузима посао извршавања рачунских операција.

2.1 Елементи програмског језика

Пре задатака укратко ћемо описати елементе програмског језика Пајтон које ћемо користити у решењима у овој глави.

2.1.1 Први програм

Програм који на екран исписује поруку `Zdravo svete!` је на Пајтону врло једноставан:

```
print(”Zdravo svete!”)
```

Програм се састоји само од једне **наредбе** и то је наредба `print` којом се текст наведен између наводника исписује на екран. Обратимо пажњу на то да језик Пајтон прави разлику између малих и великих слова и врло је важно да ли је нешто написано малим или великим словом.

2.1.2 Коментари

У коду можемо писати **коментаре** – текст којим се објашњава шта се у неком делу програма ради и који је намењен ономе ко буде читао програм (или ономе ко је тај програм писао, ако некада касније буде потребе да га доради или преправи). Рачунар игнорише коментаре у програмима и за извршавање је свеједно да ли се у програму налазе коментари или не. У језику Пајтон коментар почиње навођењем ознаке # и простире се до краја тог реда (овакве коментаре често називамо линијским коментарима). Можемо писати и коментаре који се протежу кроз неколико суседних редова (тзв. вишелинијске коментаре) и они почињу и завршавају се ознаком `'''`. У овој збирци ћемо се трудити да наводимо коментаре што више (често много више него што је то уобичајена пракса), да бисмо вам помогли у разумевању приложених решења.

2.1.3 Испис, учитавање, променљиве, типови

Испис у конзолу се врши наредбом `print(”...”)`, при чему текст који се исписује може да се наведе између једноструких или двоструких наводника. У једном програму може бити и више позива ове наредбе. На пример,

```
print(”Učim da programiram.”)
print(”Koristim programski jezik Pajton.”)
print(”Zdravo svima!”)
```

Када се програм покрене, наведене линије се исписују једна испод друге.

```
Učim da programiram.
Koristim programski jezik Pajton.
```

```
Zdravo svima!
```

Ако се жели да се након исписа текста остане у истом реду, онда се функцији `print` додаје аргумент `end=''`. Тако програм

```
print(”Učim da programiram ”, end='')
print(”u programskom jeziku Pajton.”)
```

исписује текст

```
Učim da programiram u programskom jeziku Pajton.
```

После прве наредбе се није прешло у наредни ред, па се наставак реченице појавио у истом реду, непосредно након размака који је наведен као последњи карактер у тексту који се исписује првом наредбом.

Веома интересантно, текст се у програмском језику Пајтон може “сабирати” слично као што се у математици сабирају бројеви. Уместо сабирања, наравно, врши се надовезивање текста. Тако је збир `”Zdravo” + ” ” + ”svete” + ”!”` једнак тексту `”Zdravo svete!”`. Ово се може користити приликом исписа. Наредба

```
print(”Zdravo” + ” ” + ”svete” + ”!”)
```

проузрокује испис текста

```
Zdravo svete!
```

Текст може да се учита од корисника. Размотримо наредни програм.

```
print(”Kako se zoveš?”)
ime = input()
print(”Zdravo, ti se zoveš ” + ime)
```

У првој наредби, помоћу функције `print` на екран исписујемо текст `Kako se zoveš?`. У другој наредби помоћу функције `input()` учитавамо једну линију текста од корисника. Наравно, очекујемо да корисник унесе своје име (мада може да унесе шта год жели - наш програм неће приметити разлику). Текст који корисник унесе морамо негде да упамтимо, да бисмо га у трећој линији исписали на екран (опет помоћу функције `print`). Да бисмо упамтили разне вредности (у овом примеру то је текст који је корисник унео, а у наредним примерима ће то бити разни бројеви са којима ћемо вршити различита израчунавања) користимо **променљиве**. У наведеном примеру користимо променљиву под називом `ime` и у њу смештамо текст који је корисник унео. Променљиве можемо замислити као кутијице у којима се чувају различите вредности. У сваком тренутку стара вредност може бити избачена из кутијице и у кутијицу може бити уписана нека нова вредност. Пајтон спада у групу такозваних **динамички типизираних језика** што значи да променљиве добијају **тип** од вредности коју садрже, а могу да прихвате вредност било којег типа. Променљиве могу променом вредности да промене и тип. У првим програмима користићемо следеће основне типове података.

тип	опис	пример
`str`	текст (ниска карактера)	`”Zdravo”`
`int`	цео број	`1234`
`float`	реалан број	`3.141`
`bool`	логичка вредност	`True` или `False`

У Пајтону целобројне променљиве могу да чувају веома велике и веома мале бројеве (сам језик Пајтон не поставља никаква ограничења за величину целих бројева које може да користи). Насупрот томе, за реалне бројеве (тип `float`) постоје извесна ограничења за распон (величину) и прецизност (број значајних цифара) у складу са стандардом који користе и други програмски језици. Овим ограничењима се за сада нећемо бавити јер за тиме на почетку нема потребе.

Када променљивој први пут у програму додељујемо вредност, му ту променљиву **дефинишемо**. То значи да је променљивој придружен неки простор у меморији рачунара и да је у тај простор уписана вредност променљиве. У претходном примеру променљива `ime` је дефинисана наредбом `ime = input()`.

Наравно, приликом доделе могуће је променљивама додељивати и неке конкретне вредности (кажемо константе). На пример

```
ime = ”Pera”
```

Именовање променљивих треба да тече у складу са њиховим значењем (пожељно је избегавати кратка, неинформативна имена попут `a`, `b`, `x`, `y`, осим ако из контекста програма није потпуно јасно шта би те променљиве могле да означавају). Имена променљивих не смеју да садрже размаке и морају бити састављена само од слова, цифара и доње црте тј. подвлаке (карактера _), али не могу почињати цифром.

Променљиве се могу дефинисати и помоћу вредности других типова. На пример, овако можемо да дефинишемо три променљиве, које су на почетку целобројног типа:

```
a, b, c = 3, 2, 4
```

Када су у питању реалне вредности, наглашавамо да се оне наводе са децималном тачком (у складу са правописом енглеског језика), а не запетом (у складу са правописом српског језика).

```
pi = 3.14159265
```

Наредба исписа коју смо остваривали позивом функције `print` може бити употребљена и за испис бројевних, па и логичких вредности. На пример, наредним наредбама

```
print(123)
x = 5
print(x)
print(12.345)
pi = 3.14159265
print(pi)
```

исписује се

```
123
5
12.345
3.14159265
```

Приликом исписа реалних бројева могуће је у приказу заокружити исписане вредности на одређени број децимала. Један начин да се то уради је да се вредности пре исписа претворе у текст, функцијом `format`, на следећи начин.

```
pi = 3.14159265
s = format(pi, '.2f')
print(s)
```

или краће:

```
pi = 3.14159265
print(format(pi, '.2f'))
```

Овим добијамо исписан резултат `3.14`. Број иза тачке одређује број децималних места у резултату.

Када је потребно да се прецизно контролише испис неколико бројева у једном реду, може се користити још један облик форматирања. Када се испред ниске у функцији `print` наведе слово `f`, онда унутар ниске у витичастим заградама може да се наведе име променљиве и опис исписивања, што ће при исписивању бити замењено вредношћу променљиве приказаном у скаду са наведеним описом.

```
ime1 = 'Petar'
prosek1 = 4.721876435
ime2 = 'Sava'
prosek2 = 4.832987645
print(f'{ime1} ima prosek {prosek1:.2f}, a {ime2} ima prosek {prosek2:.2f}.')
```

Овим програмом се исписује:

```
Petar ima prosek 4.72, a Sava ima prosek 4.83.
```

Опис формата `:.2f` је могао да буде и изостављен, а у том случају би одговарајући реални бројеви били исписани без форматирања.

Учитавање бројева није директно подржано у језику Пајтон. Кориснички унос се увек третира као текст (ниска карактера), а ако представља исправан запис целог или реалног броја, он се може накнадно конверто-

вати у бројевну вредност. Један од начина да се текст конвертује у целобројну вредност је функција `int`, а у реалну вредност је функција `float`. Тако ћемо целе и реалне бројеве уносити на следећи начин.

```
x = int(input())
y = float(input())
```

Нагласимо да се приликом уноса на овај начин очекује да свака унета линија текста садржи по један исправно записан број. Ако се при оваквом учитавању у једној линији унесу два броја раздвојена размаком, долази до грешке при претварању текста у број. Учитавање више бројева у једном реду је нешто сложеније и није неопходно да се сасвим разуме већ сада. Уместо тога, одговарајући запис можемо усвојити као идиом, ставити га на "јавно дозвољене пушкице" и за сада користити као такав. Два цела броја бисмо у једном реду улаза учитали на следећи начин.

```
reci = input().split()
x = int(reci[0])
y = int(reci[1])
```

Три цела броја бисмо из исте линије учитали веома слично.

```
reci = input().split()
x = int(reci[0])
y = int(reci[1])
z = int(reci[2])
```

У првој линији се учитава линија текста, а онда се помоћу `split` она дели на појединачне речи, које се смештају у листу којој дајемо име `reci`. У овом примеру `reci` је променљива која садржи листу чији су елементи ниске (стрингови). Након тога узимамо једну по једну реч из те листе (прва се налази на позицији 0, друга на позицији 1 и тако даље) и сваку од њих конвертујемо у цео број и памтимо у посебној променљивој.

На крају, рецимо да је приликом исписа могуће комбиновати текст и бројевне вредности. На пример,

```
print("Vrednost broja pi je " + str(3.1415926))
```

или једноставније:

```
print("Vrednost broja pi je", 3.1415926)
```

Један начин комбинавања текста и бројева при испису је да бројеве конвертујемо у текст помоћу функције `str` или `format`, а затим добијене текстове надовежемо један на други операцијом `+`.

Други начин је да вредности различитог (или истог) типа само наведемо као параметре функције `print`. Приликом исписивања ће између ових вредности бити приказан по један размак. На овај начин се може комбиновати и више вредности:

```
print("Unesi jedan ceo broj: ")
ceo_broj = int(input())
print("Unesi jedan realan broj: ")
realan_broj = float(input())
print("Ceo broj: ", ceo_broj, "Realan broj: ", realan_broj)
```

2.1.4 Основне аритметичке операције и изрази

Програми које смо до сада срели су врло једноставни и зато нису нарочито интересантни. Могли смо само да учитамо податке и да их испишемо у неизмењеном облику.

Рачунар је машина која обрађује податке, тј. која примењујући рачунске операције на основу улазних података добија излазне. У рачунару је све записано помоћу бројева и на најнижем нивоу се све операције своде на основне операције над бројевима. Рачунар или компјутер (енгл. computer) је справа која рачуна тј. справа која је направљена тако да може веома брзо и ефикасно да изводи рачунске операције над бројевима. Рачунање се назива и **аритметика** (од грчке речи ἀριθμός тј. аритмос која значи број, бројање, рачунање), а рачунске операције се називају и **аритметичке операције**.

- Основна аритметичка операција је **сабирање**. Збир бројева 3 и 5 се у математици представља као $3+5$. У програмском језику Пајтон користи се идентичан запис $3 + 5$. Сабирање је применљиво и на целе и на реалне бројеве (а као што смо видели - и на ниске, које се тиме дописују једна на другу). На пример, програм који учитава и сабира два цела броја може бити написан на следећи начин.

```
x = int(input())
y = int(input())
print(x + y)
```

- Поред сабирања можемо разматрати **одузимање**. Разлика бројева 8 и 2 се у математици представља као $8 - 2$. У програмском језику Пајтон користи се идентичан запис $8 - 2$. Одузимање је применљиво и на целе и на реалне бројеве.
- Још једна од основних операција је и **множење**. Производ бројева 4 и 6 се у математици представља као $4 \cdot 6$. У програмском језику Пајтон множење се означава помоћу оператора `*` и производ бројева 4 и 6 се записује као `4 * 6`.
- У програмском језику Пајтон, наравно, можемо и да **делимо**, да израчунавамо **остатак при дељењу** и **цео део количника**. Због одређених специфичности ових операција на скупу целих бројева, ми ћемо се у почетку бавити само операцијом дељења реалних бројева, док ћемо се целобројним дељењем детаљније бавити касније. Дељење бројева се врши помоћу оператора `/` и количник бројева `7,2` и `6,4` се записује као `7.2 / 6.4`. Целобројно дељење се врши помоћу оператора `//` и целобројни количник бројева 14 и 4 се записује као `14 // 4` и има вредност 3. Остатак при дељењу два цела броја се може израчунати оператором `%`. На пример, вредност израза `14 % 4` једнака је `2`. Ако желимо да одредимо реалан количник два цела броја, користимо "обично" дељење: `14/4` има вредност `3.5`.

Слично као и у математици, од константних вредности и променљивих, применом оператора и заграда граде се **изрази**. **Приоритет оператора** је усклађен са уобичајеним приоритетом у математици, па је приоритет оператора `*`, `/`, `//` и `%` виши од приоритета оператора `+` и `-`, док су сви наведени оператори лево асоцијативни (рачунске операције истог приоритета се изводе с лева на десно). Приоритет и асоцијативност се могу применити навођењем заграда.

У првим програмима ћемо се трудити да приликом извођења операција не мешамо податке различитог типа. Ипак, нагласимо да ако је у изразу један број реалан, а други цео, пре извођења операција се тај цео број претвара у реалан и операција се извршава над реалним бројевима.

2.1.5 Уграђене математичке функције

У многим конкретним применама поред основних аритметичких операција примењују се и неке мало напредније математичке функције и неке чувене математичке константе (нпр. π). У језику Пајтон оне су означене са `math` (то су константе модула `math`, али у овом тренутку нам та прецизна дефиниција није значајна).

- `abs(x)` - израчунава апсолутну вредност $|x|$;
- `math.pow(x, y)` - израчунава степен x^y, при чему се може применити и за израчунавање корена (не само квадратних) знајући да је $\sqrt[y]{x} = x^{\frac{1}{n}}$;
- `math.sqrt(x)` - израчунава квадратни корен $\sqrt{x}$;
- `math.pi` - константа π;

Поред ових, на располагању су нам и тригонометријске функције (синус, косинус, ...), њихове инверзне функције, логаритамска функција, експоненцијална функција и слично, али њих нећемо користити у почетним задацима.

2.1.6 Дефинисање функција

Поред библиотечких функција које су нам на располагању, програмски језици, па и језик Пајтон програмеру дају могућност да **дефинишу функције**, што доприноси избегавању понављених делова програма, декомпозицији проблема на мање потпроблеме и бољој организацији кода. Функције можемо замислити слично као у математици. Оне обично за неколико **улазних параметара** израчунавају једну **резултујућу вредност**. На пример, наредна функција израчунава обим правоугоника датих страница.

```
## funkcija izračunava obim pravougaonika cije su stranice dužine a i b
def obim(a, b):
    return 2*a + 2*b # formula za obim pravougaonika

## učitavamo dužine stranica pravougaonika
a = float(input())
b = float(input())
## izračunavamo obim pomoću definisane funkcije
```

```
O = obim(a, b)
## ispisujemo izračunati obim
print(O)
```

Прва линија `def obim(a, b):` започиње дефиницију функције и у њој се каже да се функција назива `obim` (иако није обавезно, у језику Пајтон пожељно је да имена функција почињу малим словом), и да прима две улазне вредности (два *параметра*) који се називају `a` и `b`. У телу функције (оно се пише увучено) се описује како се резултат израчунава на основу улазних вредности. Када је коначан резултат израчунат, функција враћа тај резултат помоћу наредбе `return`. Након исправне дефиниције следи позив функције. У претходном примеру позив је извршен у склопу доделе `O = obim(a, b)`. У позиву се наводе *аргументи* којима се иницијализује вредност параметара. У овом случају то су вредности промењљивих које су учитане са тастатуре. Аргументи могу бити и изрази или константне вредности (параметри морају бити промењљиве). На пример, допуштен је позив `Obim(5.0, 7.0)`.

Унутар функције можемо декларисати и користити и промењљиве у којима чувамо међурезултате. На пример, можемо дефинисати функцију за израчунавање површине једнакостраничног троугла дате дужине странице.

```
def povrsina_jednakostranicnog_trougla(a):
    # izračunavamo visinu trougla
    h = a * math.sqrt(3) / 2.0
    # izračunavamo površinu na osnovu dužine stranice i visine
    P = a * h / 2.0
    # vraćamo konačan rezultat
    return P
```

Овом функцијом је дефисан начин да се израчуна површина једнакостраничног троугла и када нам год то надаље затреба у програму (а у неком математичком задатку то може бити потребно више пута), можемо само позвати функцију и добити жељени резултат.

Постоје и функције које не враћају вредност. Такве функције се некада називају процедурама - оне садрже неки део алгоритма, који се извршава њиховим позивом (на пример, нешто израчунају и резултат испишу на екран). Тако се у следећем примеру дефинише функција `ukrasi_tekst`, која око датог текста исписује украсне линије, а затим се та функција позива неколико пута у програму.

```
def ukrasi_tekst(tekst):
    print("----------------------------------------")
    print(tekst)
    print("----------------------------------------")

ukrasiTekst("Dobar dan!")
ukrasiTekst("Zdravo, svima!")
ukrasiTekst("Dovidjenja!")
```

2.1.6.1 Више повратних вредности - излазни параметри

Параметри функције су њене улазне вредности (исто као и у математици), док је вредност враћена помоћу `return` њена излазна вредност. Функција обично има било који број улазних и једну излазну вредност (и ово одговара појму функције у математици). Међутим, у програмирању некада имамо потребу да дефинишемо функције које враћају више од једне вредности. У Пајтону се то ради веома једноставно - само се после речи `return` наведу вредности раздвојене зарезима. На пример, наредна функција конвертује дужину задату само у центиметрима у дужину задату у метрима и центиметрима.

```
def u_metre_i_centimetre(duzina):
    metri = duzina // 100
    centimentri = duzina % 100
    return metri, centimentri
```

Позив ове функције се врши на следећи начин.

```
m, cm = u_metre_i_centimetre(273)
```

Након овог позива, вредност промењљиве `m` ће бити `2`, а `cm` ће бити `73`.

Исти ефекат се постиже и ако се користе уређени парови тј. уређене n-торке.

```
def u_metre_i_centimetre(duzina):
    metri = duzina // 100
    centimentri = duzina % 100
    return (metri, centimentri)

(m, cm) = u_metre_i_centimetre(273)
```

2.2 Елементарна целобројна и реална аритметика

У наставку ћемо размотрити широк дијапазон задатака из домена математике, физике и хемије који се могу решити и само применом операција које смо до сада научили.

2.2.1 Геометријске формуле

У овом поглављу приказаћемо неколико задатака из области геометрије и примене геометријских формула.

Подсетимо се неких основних формула које ће нам бити потребне у наредним задацима. Обим правоугаоника чија је дужина a, а ширина b једнака је $2 \cdot a + 2 \cdot b$, док је његова површина једнака $a \cdot b$. Обим круга чији је полупречник једнак r износи $2 \cdot r \cdot \pi$, док му је површина једнака $r^2 \cdot \pi$.

Обим троугла чије су дужине страница a, b и c једнак је $O = a + b + c$, док се површина може израчунати Хероновим обрасцем $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је $s = (a + b + c)/2$ полуобим троугла.

На правоугли троугао чије су дужине катета једнаке a и b, а хипотенуза је дужине c може се применити Питагорина теорема која гласи: квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама, односно: $a^2 + b^2 = c^2$.

У задацима који следе претпоставићемо да су ти познати основни појмови у вези са Декартовим координатним системом. Декартов систем у равни задат је двема осама: x-осом или апсцисом и y-осом или ординатом. Тачка у равни је одређена вредностима своје две координате, које најчешће означавамо са x и y. Координатни почетак је тачка са координатама $(0, 0)$.

Задатак: Тренинг

Спортиста се на почетку тренинга загрева тако што трчи по ивицама правоугаоног терена дужине d и ширине s. Написати програм којим се одређује колико метара претрчи спортиста док једном обиђе терен.

Улаз: У првој линији стандардног улаза се налази целобројна вредност d ($0 < d \leq 100$), а у следећој линији целобројна вредност s ($0 < s \leq 100$) које редом представљају дужину и ширину терена изражену у метрима.

Излаз: Цео број метара које претрчи спортиста док једном обиђе терен.

Пример

Улаз	*Излаз*
50 25	150

Решење

Дужина у метрима коју претрчи спортиста док једном обиђе терен једнака је обиму тог терена тј. збиру двоструких вредности дужине и ширине терена изражене у метрима. Према томе, потребно је исписати збир двоструких вредности два учитана броја.

```
duzina = int(input())
sirina = int(input())
obim = 2 * duzina + 2 * sirina
print(obim)
```

Задатак: Лист папира

Написати програм који на основу задате ширине и висине листа папира (правоугаоног облика) у милиметрима одређује његову површину у квадратним милиметрима.

Улаз: У једној линији стандардног улаза налазе се две целобројне вредности V и S ($0 < V \leq 300$, $0 < S \leq 300$) које представљају ширину и висину листа папира изражену у милиметрима.

Излаз: Један цео број који представља површину листа у квадратним милиметрима

Пример

Улаз	*Излаз*
`279 216`	`60264`

Решење

Површина листа папира изражена у квадратним милиметрима једака је производу висине и ширине тог правоуганика изражених у милиметрима. Према томе, потребно је исписати производ два учитана броја.

Треба обратити пажњу на то да се оба броја наводе у истој линији улаза, па можемо учитану ниску разбити на делове помоћу `split()`, а затим из сваког дела појединачно прочитати записани број.

```
reci = input().split()
visina = int(reci[0])
sirina = int(reci[1])
povrsina = visina * sirina
print(povrsina)
```

Задатак: Столњак

Написати програм којим се израчунава потребна дужина траке за поруб столњака кружног облика чија је површина P.

Улаз: У линији стандардног улаза се налази реална вредност P ($1 \leq P \leq 1000$).

Излаз: Потребна дужина траке (реалан број заокружен на две децимале).

Пример

Улаз	*Излаз*
`7853.982`	`314.16`

Решење

Пошто је $P = r^2\pi$, из познате површине круга P може да се одреди полупречник r (на основу везе $r = \sqrt{P/\pi}$). Када је израчунат полупречник, потребно је да се примени формула за обим круга $O = 2r\pi$.

Подсетимо се, константа π је у језику Пајтон доступна преко `math.pi`, при чему морамо укључити заглавље `math` директивом `import math`.

```
import math
P = float(input());          # povrsina
r = math.sqrt(P / math.pi);  # poluprecnik
O = 2 * r * math.pi;         # obim
print(format(O, '.2f'))
```

Задатак: Фудбалски терен

Фудбалски терен димензија $d \times s$ треба оградити правоугаоном оградом тако да је растојање страница ограде од линије терена r. Напиши програм који одређује дужину ограде.

Улаз: У три реда стандардног улаза налазе се три цела броја:

- d - дужина терена у метрима ($90 \leq d \leq 120$)
- s - ширина терена у метрима ($45 \leq s \leq 90$)
- r - растојање ограде од терена у метрима ($2 \leq r \leq 10$)

Излаз: Дужина ограде у метрима.

Пример

Улаз	*Излаз*

`100`
`60`
`3`
	`344`

Решење

Дужине страница правоугаоне ограде су $a = d + 2 \cdot r$ и $b = s + 2 \cdot r$, па је дужина ограде обим правоугаоника са наведеним страницама, који је једнак: $2 \cdot (a + b) = 2 \cdot ((d + 2 \cdot r) + (s + 2 \cdot r)) = 2 \cdot (d + s + 4 \cdot r)$.

У програму је могуће употребити помоћне промењљиве у којима се чува дужина страница ограде, а затим њиховим коришћењем израчунати обим. Тиме се добија мало дужи, али разумљивији програм.

```
duzinaTerena = int(input())
sirinaTerena = int(input())
rastojanje = int(input())
duzinaOgrade = duzinaTerena + 2 * rastojanje
sirinaOgrade = sirinaTerena + 2 * rastojanje
obimOgrade = 2 * (duzinaOgrade + sirinaOgrade)
print(obimOgrade)
```

Друга могућност је директно применити крајњу формулу коју смо извели. Тиме се добија краћи, али мало мање разумљив програм.

```
d = int(input())           # duzina terena
s = int(input())           # sirina terena
r = int(input())           # rastojanje ograde od terena
obim = 2 * (d + s + 4 * r) # obim ograde
print(obim)
```

Задатак: Растојање тачака

Напиши програм који израчунава и исписује растојање између тачака задатих својим координатама.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се четири реална броја, сваки у посебном реду. Прва два броја A_x и A_y представљају координате тачке $A = (A_x, A_y)$, док друга два броја B_x и B_y представљају координате тачке $B = (B_x, B_y)$.

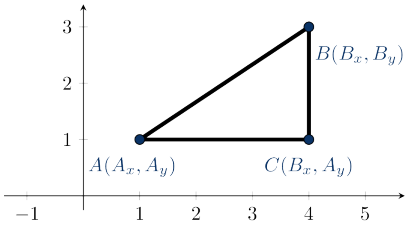
Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља растојање између тачака A и B, заокружен на пет децимала.

Пример

Улаз	*Излаз*

`0`
`0`
`1`
`1`
	`1.41421`

Решење



Слика 2.1: Растојање тачака

Посматрајмо тачку C која има координате (B_x, A_y). Троугао ABC је правоугли троугао са правим углом код темена C. Тражено растојање између тачака A и B једнако је дужини хипотенузе тог троугла и може се израчунати применом Питагорине теореме која тврди да је квадрат над хипотенузом једнак збиру квадрата над обе катете. Пошто су катете нашег троугла дужи AC и BC, важи да је $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, па је $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$. Пошто тачке A и C имају исту y-координату, дужина дужи AC једнака је $|B_x - A_x|$. Заиста, пошто је дуж AC паралелна оси x, њена дужина једнака је дужини интервала који представља њену пројекцију на ту осу. То је интервал $[A_x, B_x]$ ако је $A_x \leq B_x$ и његова дужина је $B_x - A_x$, тј. интервал $[B_x, A_x]$ ако је $B_x \leq A_x$ и његова дужина је $A_x - B_x$. У оба случаја, дужина је једнака $|B_x - A_x|$. Слично, дужина дужи BC једнака је $|B_y - A_y|$. Зато је $|AB| = \sqrt{|B_x - A_x|^2 + |B_y - A_y|^2}$. Пошто је квадрат броја увек позитиван, није неопходно користити апсолутну вредност и важи да је $|AB| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$.

Подсетимо се, у језику Пајтон се квадратни корен може израчунати функцијом `math.sqrt`, а степен оператором `**`.

```
import math
ax = float(input()); ay = float(input())
bx = float(input()); by = float(input())
d = math.sqrt((bx - ax)**2 + (by - ay)**2)
print(format(d, '.5f'))
```

Задатак: Површина троугла датих темена

Напиши програм који израчунава површину троугла ако су познате координате његових темена.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се 6 реалних бројева (сваки у засебном реду). Прва два представљају x и y координату темена A, друга два x и y координату темена B и последња два представљају x и y координату темена C.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља површину троугла (допуштена грешка израчунавања је 10^{-5}).

Пример

Улаз	*Излаз*
0 0 0 1 1 0	0.5

Решење

Задатак је математички могуће решити на неколико начина.

Херонов образац

Један начин је да применимо Херонов образац

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

где је су a, b и c дужине страница троугла, а $s = (a+b+c)/2$ његов полуобим. Дужине страница можемо израчунати као растојање између темена троугла, применом Питагорине теореме, како је то показано у задатку Растојање тачака.

Мана овог решења је то што се у њему користи квадратни корен, иако се до решења може доћи и без кореновања.

```
import math

# rastojanje od tacke (x1, y1) do tacke (x2, y2)
def rastojanje(x1, y1, x2, y2):
    return math.sqrt((x2 - x1)**2 + (y2 - y1)**2)

#  povrsina trougla cije su duzine stranica a, b i c
def povrsina_trougla(a, b, c):
    # Heronov obrazac
    s = (a + b + c) / 2
    return math.sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))

# koordinate temena
Ax = float(input()); Ay = float(input())
Bx = float(input()); By = float(input())
Cx = float(input()); Cy = float(input())
```

```
# duzine stranica trougla
a = rastojanje(Bx, By, Cx, Cy);
b = rastojanje(Ax, Ay, Cx, Cy);
c = rastojanje(Ax, Ay, Bx, By);

# povrsina trougla
P = povrsina_trougla(a, b, c);

print(format(P, '.5f'))
```

Формула пертле

Задатак је могуће решити и општијом **формулом пертле** која омогућава израчунавање површине произвољних полигона којима се странице не пресецају међусобно. Заиста, ако напишемо координате тачака у следећем облику

$$\begin{matrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ a_x & a_y \end{matrix}$$

Формула се гради тако што се са једним знаком узимају производи одозго-наниже, слева-удесно (то су $a_x b_y$, $b_x c_y$ и $c_x a_y$), док се са супротним знаком узимају производи одоздо-навише, слева удесно (то су $a_x c_y$, $c_x b_y$, и $b_x a_y$), што, када се нацрта, заиста подсећа на цик-цак везивање пертли.

$$\frac{|b_x c_y - a_x c_y - b_x a_y - b_y c_x + a_y c_x + a_x b_y|}{2}$$

Ова се формула може извести помоћу векторских производа и детерминанти, али и елементарнијим техникама (сабирањем означених прозвода троуглова или трапеза).

```
import math

# povrsina trougla zadatog temenima (Ax, Ay), (Bx, By), (Cx, Cy)
def povrsina_trougla(Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy):
    return abs(Ax*By + Bx*Cy + Cx*Ay - Ax*Cy - Cx*By - Bx*Ay) / 2.0;

# koordinate temena
Ax = float(input()); Ay = float(input())
Bx = float(input()); By = float(input())
Cx = float(input()); Cy = float(input())

# povrsina trougla
P = povrsina_trougla(Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy)
print(format(P, '.5f'))
```

Задатак: Ниво базена

Током олује пало је n литара воде по квадратном метру. Написати програм којим се одређује за колико центиметара се подигао ниво воде у отвореном базену датих димензија, ако знамо да се вода није прелила преко базена.

Улаз: У првој линији стандарндог улаза налази се реалан број n који представља количину кише која је пала по квадратном метру изражену у литрима. У следеће три линије налазе се реални бројеви a, b, c који представљају димензије базена изражене у метрима и то редом дужину, ширину и дубину.

Излаз: На стандарном излазу приказати један реалан број на две децимале који представља за колико центиметара се подигао ниво воде у базену.

Пример

Улаз	*Излаз*
75.5 4 7 1.7	7.55

Задатак: Правоугаоник дат наспрамним теменима

Дате су координате два наспрамна темена правоугаоника чије су странице паралелне координатним осама. Написати програм којим се приказују дужина дијагонале одређене тим теменима, обим и површина тог правоугаоника.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се 4 цела броја из интервала $[-1000, 1000]$, сваки у посебној линији. Учитани бројеви представљају редом x и y координату два наспрамна темена правоугаоника.

Излаз: На стандардном излазу приказати дужину дијагонале правоугаоника, заокружену на две децимале, обим и површину датог правоугаоника. Сваки податак приказати у посебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 -1 -3 6	10.63 30 56

Задатак: Троугао одређен правом и координатним почетком

Одреди површину и обим троугла којег права $y = a \cdot x + b$ $(a, b \neq 0)$, задата коефицијентима a и b, образује са координатним осама.

Улаз: Два реална броја различита од 0. У првој линији a, а у другој b.

Излаз: Приказати у првој линији површину троугла, а у другој обим, заокружене на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
2.5 3.0	1.80 7.43

2.2.2 Линеарне једначине и системи линеарних једначина

Линеарна једначина са једном непознатом је једначина облика: $a \cdot x = b$ (или њена еквивалентна форма $ax + b = c$), где је са x означена променљива, а са a, b и c коефицијенти који су најчешће реални бројеви. За решење ове линеарне једначине важи следеће:

- ако је $a \neq 0$, онда је решење облика $x = \frac{b}{a}$
- ако је $a = 0$ и $b = 0$, онда једначина има бесконачно много решења
- ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, онда једначина нема решења

Најједноставнији систем линеарних једначина је са две једначине и две непознате:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

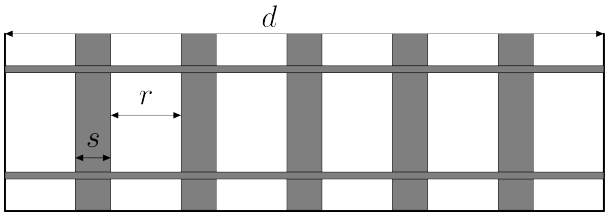
где су са x, y означене непознате, а са $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ коефицијенти.

Систем има јединствено решење ако је $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ и можемо га решити тако што ћемо изразити једну непознату у једној од једначина, (на пример, ако је $a_1 \neq 0$, променљиву x из прве једначине као $x = (c_1 - b_1y)/a_1$) и уврстимо добијени израз у другу једначину. На тај начин добијамо једначину са једном непознатом y коју умемо да решимо, а на основу њене вредности знамо да израчунамо и вредност друге непознате x. Други начин за решавање оваквог система јесте да множењем ових једначина погодно одабраним коефицијенима ове једначине доведемо у стање да коефицијенти уз једну променљиву у овим једначинама буду супротни. Сабирањем овако добијених једначина добијамо линеарну једначину са једном непознатом

коју знамо да решимо, а када имамо вредност једне непознате, једноставно добијамо и вредност друге непознате у систему.

Задатак: Ограда терасе

На тераси дужине d метара треба распоредити n стубића ширине s центиметара тако да растојање између стубића, као и између стубића и зида буде исто.



Слика 2.2: Ограда терасе

Улаз: Три реда стандардног улаза садрже три броја:

- d - реалан број који представља дужину терасе у m ($1 \leq d \leq 20$)
- n - цео број стубића ($1 \leq n \leq 100$)
- s - реалан број који представља ширину стубића у cm ($5 \leq s \leq 15$)

Излаз: Растојање између стубића у центиметрима, заокружено на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
10 30 10	22.58

Решење

Нека је r непознато растојање између стубића. Тада n стубића покрива $n \cdot s\,\mathrm{cm}$. Између n стубића постоји $n-1$ размак, један размак је између левог зида и првог стубића и један размак је између последњег стубића и десног зида. Дужина терасе у центиметрима је $d \cdot 100\,\mathrm{cm}$. Дакле, важи услов

$$n \cdot s\,\mathrm{cm} + (n+1) \cdot r\,\mathrm{cm} = d \cdot 100\,\mathrm{cm}$$

Решавањем ове једначине добија се да је растојање између стубића

$$r = \frac{d \cdot 100 - n \cdot s}{n+1}.$$

До истог закључка смо могли доћи и мало неформалније. Укупно постоји $n+1$ размак чију дужину треба израчунати. Зато за поделу на $n+1$ део остаје $(d \cdot 100 - n \cdot s)\,\mathrm{cm}$, чиме се добија исто решење као претходно.

```
d = float(input())              # dužina terase (u m)
n = int(input())                # broj stubica
s = float(input())              # sirina stubica (u cm)
r = (d * 100 - n * s) / (n + 1)  # rastojanje izmedju stubica (u cm)
print(format(r, '.2f'))
```

Задатак: Збирови по три странице правоугаоника

Ако је збир неке три странице правоугаоника m, а збир неке друге три странице истог правоугаоника n, написати програм којим се одређује обим и површина тог правоугаоника.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи реалан број m који представља збир неке три странице правоугаоника, друга линија садржи реалан број n који представља збир неке друге три странице правоугаоника.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати на две децимале обим правоугаоника, а у другој линији површину правоугаоника такође на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
8	12.00
10	8.00

Решење

Обележимо странице правоугаоника са a и b. Тада је обим правоугаоника $2 \cdot a + 2 \cdot b$, а површина је $a \cdot b$. Ако је први збир три странице правоугаоника $2 \cdot a + b$ онда је збир друге три странице $a + 2 \cdot b$. Тако добијамо две једначине $2 \cdot a + b = n$ и $a + 2 \cdot b = m$ из којих можемо одредити a и b. Један начин да се дође до решења је да се реши систем једначина неком од класичних метода решавања система једначина, чиме се добија да је $a = \frac{2n-m}{3}$ и $b = \frac{2m-n}{3}$, на основу чега се веома једноставно одређују обим и површина као $O = 2(a + b)$ и $P = a \cdot b$.

```
n = float(input())     # zbir neke tri stranice pravougaonika 2a+b
m = float(input())     # zbir neke tri stranice pravougaonika 2b+a
a = (2 * n - m) / 3.0  # stranica a
b = (2 * m - n) / 3.0  # stranica b
O = 2 * (a + b)        # obim pravougaonika 2(a+b)
P = a * b              # povrsina pravougaonika a*b
print(format(O, '.2f'))
print(format(P, '.2f'))
```

Задатак: Просек на такмичењу

На такмичењу из математике учествовало је N ученика. Извештај о броју поена одштампан је на две стране. Наставник грешком није понео прву страну извештаја, али се сећа да је на дну стране писало да је просечан број поена за ту страну био p_1. На другој страни (коју има код себе) су подаци о K ученика и просечан број поена за ту страну је p_2. Написати програм којим се одређује колики је просечан број поена свих ученика.

Улаз: На стандардном улазу налазе се

- у првој линији природан број N укупна број ученика ($N \leq 200$)
- у другој линији природан број K број ученика на другој страни ($K \leq 100$)
- у трећој линији реалан број p_1 просечан број поена ученика на првој страни ($0 \leq p_1 \leq 100$)
- у четвртој линији реалан број p_2 просечан број поена ученика на другој страни ($0 \leq p_2 \leq 100$)

Излаз: На стандарном излазу приказати, на две децимале, просечан број свих ученика.

Пример

Улаз	*Излаз*
80	82.36
30	
78.20	
89.30	

2.2.3 Линеарна зависност и пропорција

Ако је зависност променљивих x и y изражена формулом облика $y = ax + b$, онда за променљиве x и y кажемо да су линеарно зависне. Везу $y = ax + b$ можемо разматрати и као функцију која слика x у y и ову функцију онда називамо линеарном функцијом, при чему је онда број a коефицијент линеарне функције, а b слободни члан.

Количник два броја називамо и њиховом размером. Ако две размере $a : b$ и $c : d$ имају исту вредност, онда кажемо да оне чине пропорцију и то записујемо у облику $a : b = c : d$. Када је један од елемената пропорције непознат, пропорцију можемо да решимо тако што је напишемо у облику једнакости производа њених унутрашњих чланова са производом њених спољашњих чланова: $b \cdot c = a \cdot d$.

Задатак: Подела интервала

Дат је интервал $[a, b]$ реалне праве. Написати програм којим се одређује тачка реалне праве која интервал дели у размери $p : q$.

Улаз: У првој линији стандарног улаза налази се реалан број a, у другој линији реалан број b ($a < b$). Трећа и четврта линија садрже природне бројеве редом p и q.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број заокружен на две децимале који представља тражену тачку.

Пример

Улаз	*Излаз*
0 10 1 4	2.00

Решење

Интервал $[a, b]$ је дужине $b-a$ и треба га поделити у размери $p : q$. То значи да тражимо тачку x тог интервала тако да је дужина интервала $[a, x]$ једнака $p \cdot k$ а дужина интервала $[x, b]$ једнака $q \cdot k$, за неки реалан број k. Како је дужина интервала $[a, b]$ једнака збиру дужина интервала $[a, x]$ и $[x, b]$, добијамо једначину $b-a = p \cdot k+q \cdot k$ тј. $b - a = (p + q) \cdot k$. Решавањем једначине добијамо да је $k = \frac{b-a}{p+q}$, па је тражена тачка $x = a + p \cdot k$.

```
a = float(input())
b = float(input())
p = int(input())
q = int(input())
k = (b - a) / (p + q)
x = a + p * k
print(format(x, '.2f'))
```

До решења можемо доћи коришћењем основног својства пропорције да је $a : b = c : d$ еквивалентно са $a \cdot d = b \cdot c$. Тачка x дели интервал $[a, b]$ у размери $p : q$ ако су дужине интервала $[a, x]$ и $[x, b]$ у размери $p : q$, тј. ако је $(x - a) : (b - x) = p : q$. Из последње пропорције добијамо да је

$$x = \frac{q \cdot a + p \cdot b}{p + q}.$$

```
a = float(input())
b = float(input())
p = int(input())
q = int(input())
x = (b * p + a * q) / (p + q)
print(format(x, '.2f'))
```

Задатак: Генератор случајних бројева

У рачунарству се често јавља потреба за генерисањем случајних (насумичних) бројева. Већина програмских језика обезбеђује функцију која враћа насумично одабран реалан број из интервала $[0, 1)$ (тај број већи или једнак од 0, а строго мањи од 1), подразумевајући да програмер може накнадним аритметичким трансформацијама добити број из било ког интервала $[a, b)$ (за који важи да је $a < b$). Напиши програм који за унети број x из интервала $[0, 1)$ одређује њему одговарајући број из интервала $[a, b)$, подразумевајући да се пресликавање врши линеарном функцијом (број који се тражи дели интервал $[a, b)$ у истом односу у ком тачка x дели интервал $[0, 1)$).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се један реалан број x из интервала $[0, 1)$ (број који је вратио генератор случајних бројева), затим, у наредном реду један реалан број a и онда у наредном реду број b (при том важи $a < b$).

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број из интервала $[a, b)$ који се добија када се унети број x преслика линеарном функцијом која пресликава интервал $[0, 1)$ на интервал $[a, b)$. Резултат приказати заокружен на 5 децимала.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
0.5	0.50000
-2	
3	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0	-2.00000
-2	
3	

Пример 3

Улаз	*Излаз*
0.8	2.00000
-2	
3	

Решење

Потребно је дефинисати линеарну функцију која вредност 0 пресликава у вредност a док вредност 1 пресликава у вредност b. Ако је та функција облика $y = k \cdot x + n$ тада важи да је $a = k \cdot 0 + n$ и $b = k \cdot 1 + n$. Зато је $n = a$ и $k = b - a$ и тражено пресликавање је $y = (b - a) \cdot x + a$. Заиста, када вредност из интервала $[0, 1)$ помножимо бројем $b - a$ добијамо број из интервала $[0, b - a)$. Додавањем броја a добијамо број из интервала $[a, b)$.

```
x = float(input())
a = float(input())
b = float(input())
y = a + x * (b - a)
print(format(y, '.5f'))
```

Задатак: Група радника

Група коју чини n радника уради посао за s сати. Написати програм којим се одређује за колико сати ће посао бити завршен ако се прикључи још m радника, а сваки радник ради посао подједнако ефикасано.

Улаз: У три линије стандардног улаза се редом налазе природан број n, реалан број s и природан број m.

Излаз: Један реалан број, заокружен на две децимале, који представља број сати потребних да се посао заврши када посао ради $n + m$ радника.

Пример

Улаз	*Излаз*
1	1.5
3	
1	

Решење

Један начин да се задатак реши је да се прво израчуна колико је радник-сати потребно да се заврши цео посао. Радник-сат посматрамо као јединицу за количину посла, тј. ону количину посла коју један радник може да обави за 1 сат. Пошто сваки од n радника ради s_n сати, укупна количина посла је $n \cdot s_n$ радник-сати. Када тај посао обавља $n + m$ радника, време потребно за обављање посла добијамо дељењем количине посла бројем радника, па је број сати за које ће посао бити завршен једнак

$$\frac{n \cdot s_n}{n + m}.$$

До истог израза се може доћи и применом пропорције. Више радника брже заврши посао, па је потребно применити обрнуту пропорцију. Ако са x обележимо број сати за које посао уради већа група радника, до решења се долази решавањем пропорције $n : (n + m) = x : s_n$ (са обе стране једнакости вредности су поређане од мање ка већој).

```
n = int(input())          # pocetni broj radnika
sn = float(input())       # vreme za koje urade posao
m = int(input())          # dodatni broj radnika
snm = (n * sn) / (n + m)  # vreme za koje svi zajedno urade posao
print(format(snm, '.2f'))
```

Задатак: Такси

У такси су истовремено ушла три путника, али су излазили један по један. Договорили су се да у плаћању сваког дела вожње подједнако учествују путници који су у том делу вожње били у таксију. Ако се зна стање на таксиметру у динарима када је изашао свако од њих, колико треба да плати путник који је изашао први, колико други, а колико трећи?

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају три реална броја, у сваком реду по један, у следећем редоследу:

- c_1 - стање на таксиметру у моменту изласка првог путника,
- c_2 - стање на таксиметру у моменту изласка другог путника,
- c_3 - стање на таксиметру у моменту изласка трећег путника.

При томе важи $c_1 < c_2 < c_3$.

Излаз: На стандардни излаз исписати три реална броја заокружена на две децимале (у сваком реду по један), који редом представљају трошкове путовања првог, другог и трећег путника.

Пример

Улаз	*Излаз*
1200.0	400.00
1500.0	550.00
2000.0	1050.00

Задатак: Курс

Написати програм којим се на основу датог куповног и продајног курса евра према динару и куповног и продајног курса долара према динару, израчунава куповни и продајни курс долара према евру и евра према долару. Куповни курс валуте 1 према валути 2 представља износ валуте 1 који се може купити јединицом валуте 2 (валута 1 се третира као роба која се купује), а продајни курс валуте 1 према валути 2 представља износ валуте 2 који се може добити продајом јединице валуте 1 (валута 1 се третира као роба која се продаје). На пример, куповни курс евра према динару је број динара потребних да би се купио један евро, док је продајни курс евра према динару број динара који се могу добити продајом једног евра. Све трансакције евра према долару и обрнуто се обављају, по прописима НБС, преко конверзије у динаре.

Улаз: У свакој од четири линије стандардног улаза налазе се редом куповни курс евра према динару, продајни курс евра према динару, куповни курс долара према динару, продајни курс долара према динару (реални бројеви).

Излаз: У свакој од четири линије стандардног излаза исписују се редом реални бројеви, куповни курс долара према евру, продајни курс долара према евру, куповни курс евра према долару и продајни курс евра према долару, заокружени на 4 децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
123.59	0.8931
122.85	0.8824
109.72	1.1332
109.06	1.1197

2.2.4 Степеновање и кореновање

Задатак: Степен и корен

Ђока је вежбао множење децималних бројева тако што је за неки број a рачунао производ $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, тј. производ у којем се број a јавља n пута као чинилац. Након тога се са својом другарицом Даницом играо тако што јој је задавао да она погоди број a када јој он каже број n и резултат који је добио. Напиши програм који Ђоки помаже да провери да ли је добро рачунао, а Даници помаже да провери да ли је добро погодила непознат број.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се реалан број x (са највише две децимале) и цео број n.

Излаз: На стандардни излаз се исписују два реална броја (заокружена на пет децимала) и то сваки у посебном реду:

- број s такав да је $s = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$,
- број k такав да је $x = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n}$.

Пример

Улаз	*Излаз*
2.5	97.65625
5	1.20112

Решење

Важи да је $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$. Дакле, за дато x потребно је пронаћи s тако да је $s = x^n$, што се постиже степеновањем и пронаћи k тако да је $x = k^n$, што се постиже кореновањем тј. израчунавањем $k = \sqrt[n]{x}$. У језику Пајтон степен је могуће израчунати библиотечком функцијом `math.pow`, при чему тада морамо да укључимо заглавље `math` директивом `import math`. Иста функција се може употребити и за израчунавање корена, коришћењем формуле $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

```
import math

x = float(input())
n = int(input())
print(format(math.pow(x, n), '.5f'))
print(format(math.pow(x, 1.0 / n), '.5f'))
```

2.2.5 Кретање

У овом поглављу приказаћемо неколико задатака из области физике тј. кретања. Највећи број задатака биће у вези са за равномерним кретањем (што значи да се тело све време креће истом брзином). Брзина v при равномерном кретању једнака је количнику пређеног пута s и времена t, тј. при равномерном кретању важи веза $v = \frac{s}{t}$, под претпоставком да се користе одговарајуће јединице мере.

Још један правилан облик кретања је равномерно убрзано кретање, што значи да се брзина мења на основу константног убрзања. Код равномерно убрзаног кретања брзина након времена t се може израчунати формулом $v = v_0 + a \cdot t$, где је v_0 почетна брзина а a је убрзање. Пређени пут се може израчунати формулом $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$.

Задатак: Путовање

Породица је кренула аутом на летовање. Аутомобилом треба да пређу s километара крећући се равномерном брзином од v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Написати програм којим се одређује за колико ће сати прећи пут.

Улаз: У првој линији стандардног улаза се налази реална вредност v, а у следећој линији реална вредност s које редом представљају брзину изражену у $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ и планирани пређени пут у километрима.

Излаз: Један реалан број заокружен на две децимале који представља потребно време у сатима.

Пример

Улаз	*Излаз*
60	17.50
1050	

Решење

Брзина v при равномерном кретању једнака је количнику пређеног пута s и времена t, тј. важи веза $v = \frac{s}{t}$. Зато се време израчунава као количник пређеног пута и брзине кретања (формула за време приликом равномерног кретања $t = \frac{s}{v}$). Према томе, потребно је исписати количник два учитана броја.

```
v = float(input())   # brzina
s = float(input())   # predjeni put
t = s / v            # vreme
print(format(t, '.2f'))
```

Задатак: Бициклиста

Бициклиста се кретао равномерно, неком константном брзином. На почетку дугачке низбрдице почео је да се креће равномерно убрзано са константним убрзањем. Написати програм којим се одређује колики ће део низбрдице да пређе након једног минута, као и колика ће му бити брзина у том тренутку.

НАПОМЕНА: Код равномерно убрзаног кретања пређени пут се изражава формулом $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$, док се брзина након времена t изражава формулом $v = v_0 + a \cdot t$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза се налази реална вредност v_0 која представља брзину изражену у $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а у следећој линији реална вредност a која представља убрзање изражено у $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Излаз: Два реална броја, сваки у посебном реду, која представљају пређено растојање s у m и тражену брзину v у $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Пример

Улаз	*Излаз*
10	960.00
0.2	22.00

Решење

Пређени пут и брзину рачунамо на основу датих формула. Како је брзина изражена у $\frac{m}{s}$ и убрзање у $\frac{m}{s^2}$, један минут кретања је потребно у формуле унети као 60 секунди.

```
v0 = float(input())           # pocetna brzina (u m/s)
a  = float(input())           # ubrzanje (u m/s^2)
t = 60                        # vreme (u s)
s = v0 * t + (a * t * t) / 2  # predjeni put (u m)
v = v0 + a * t                # brzina (u m/s)
print(format(s, '.2f'))
print(format(v, '.2f'))
```

Задатак: Сустизање аутомобила

Са истог стартног места крећу два аутомобила. Први се креће брзином v_1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, други v_2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ при чему је $v_2 > v_1$. Други аутомобил полази t минута после првог. Написати програм којим се одређује после колико минута од поласка други аутомобил сустиже први.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три реална броја која редом представљају брзину v_1 првог, брзину v_2 другог аутомобила (изражене у $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) и време t (изражено у min) након којег креће други аутомобил. Сваки број је у посебној линији.

Излаз: На стандарном излазу приказати број минута заокружен на две децимале након којих други аутомобил сустиже први.

Пример

Улаз	*Излаз*
20	40.00
25	
10	

Решење

Аутомобили се крећу равномерно, тако да ће се решење заснивати на вези између брзине, пређеног пута и времена $v = \frac{s}{t}$ описаној у задатку Путовање.

Аутомобили полазе са истог места па до сустизања долази када аутомобили пређу исти пут. Тражено време можемо одредити изједначавањем пређених путева.

За почетак је потребно да све изразимо у истим јединицама. Ако је брзина аутомобила једнака v $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, пошто један минут износи 60 секунди (тј. важи да је $\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$), брзина је једнака $v\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} = (v \cdot 60)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$.

Обележимо са x број минута после којих други аутомобил сустиже први. Први аутомобил се до сустизања креће $t + x$ минута а други x минута. Пређени пут при равномерном кретању једнак је производу брзине и времена ($s = v \cdot t$). Зато је пут који до сустизања пређе први аутомобил $(t + x)\,\mathrm{min} \cdot ((v_1 \cdot 60)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}) = (t + x) \cdot v_1 \cdot 60\,\mathrm{m}$,

а пут који до сустизања пређе други аутомобил $x\,\mathrm{min} \cdot ((v_2 \cdot 60)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}) = x \cdot v_2 \cdot 60\,\mathrm{m}$.

Пошто су у тренутку сусрета оба аутомобила прешла исто растојање, изједначавањем пређених путева добијамо једначину $(t + x) \cdot v_1 \cdot 60\,\mathrm{m} = x \cdot v_2 \cdot 60\,\mathrm{m}$, тј. $(t + x) \cdot v_1 = x \cdot v_2$ чије решење је $x = \frac{v_1 \cdot t}{v_2 - v_1}$.

```
v1 = float(input())       # brzina prvog automobila (u m/s)
v2 = float(input())       # brzina drugog automobila (u m/s)
t  = float(input())       # kasnjenje prvog automobila (u min)
x = (v1 * t) / (v2 - v1)  # broj minuta do sustizanja
print(format(x, '.2f'))
```

Задатак: Растојање кућа

Пера и Мика живе у истој улици. Микина кућа је удаљенија од школе. Они иду у школу истим путем, полазе из куће у исто време и равномерно се крећу. Пера се креће брзином $v_1 \frac{m}{s}$, а Мика брзином $v_2 \frac{m}{s}$ ($v_2 > v_1$). Написати програм којим се одређује колико је растојање између њихових кућа, ако се зна да је после t секунди Мика био d метара иза Пере.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе четири реална броја, сваки у посебној линији. Они редом представљају брзину кретања Пере (v_1) и брзину кретања Мике (v_2), изражене у $\frac{m}{s}$, потом број секунди (t) и растојање између Пере и Мике у метрима (d).

Излаз: На стандарном излазу приказати реалан број, на две децимале, који представља колико је растојање између њихових кућа.

Пример

Улаз	*Излаз*
1.6 2.1 10 30.0	35.00

Задатак: Колона

Војници се крећу у колони дужине d метара, брзином v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Командир који се налази на крају колоне, шаље курира на бициклу са поруком на чело колоне. Предавши поруку, курир се одмах враћа назад. Брзина курира бициклисте је v_k $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ($v_k > v$). Написати програм којим се одређује после колико времена се курир враћа на крај колоне.

Улаз: На стандардном улазу налазе се три позитивна реална броја, сваки у посебном реду, који редом представљају дужину колоне у метрима (m), и брзине војника и курира изражене у километрима на час ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Излаз: На стандардном излазу исписати време након кога се курир враћа на крај колоне. Време приказати у минутама на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
850 3.5 20	5.26

Задатак: Браћа и пас

Два брата налазе се на удаљености d метара, крећу се истим правцем, у супротним смеровима. Први креће се креће равномерно брзином од v_1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ а други v_2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Пас који је бржи од оба брата равномерно трчи брзином од v_p $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Пас трчи од првог ка другом брату, када стигне до другог окреће се и трчи назад ка првом, када стигне окреће се и трчи ка другом и то понавља све док се браћа не сретну. Напиши програм који одређује колико је пас метара претрчао.

Улаз: На стандардном улазу налазе се четири реална броја, сваки у посебној линији, који редом представљају растојање између браће изражено у m, брзине два брата изражене у $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, редом брзина првог брата па брзина другог брата, и брзину пса изражену у $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Излаз: Исписује се један реалан број заокружен на две децимале који представља број метара које је пас претрчао.

Пример

Улаз	*Излаз*
500.00	1440.00
3.00	
2.00	
4.00	

2.3 Целобројно дељење

У овом делу збирке позабавићемо се различитим применама целобројног дељења.

2.3.1 Појам целобројног количника и остатка

Број q се назива **целобројни количник** а број r **остатак** при дељењу природних бројева a и b ($b \neq 0$) ако је $a = b \cdot q + r$ и ако је $0 \leq r < b$.

Целобројни количник бројева a и b обележаваћемо са $a \operatorname{div} b$ или са $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ ($\lfloor \ldots \rfloor$ означава заокруживање наниже односно највећи цео број који је мањи или једнак датом броју), док ћемо остатак означавати са $a \bmod b$. У каснијим поглављима (види, на пример, задатак Поклони) доказаћемо и формално да је $a \operatorname{div} b = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, тј. доказаћемо да је $q = a \operatorname{div} b$ највећи цео број q такав да је $q \cdot b \leq a$, што оправдава и коришћење ознаке $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ за целобројни количник бројева a и b.

У језику Пајтон 3 се целобројни количник може израчунати оператором `//`, а остатак при дељењу оператором `%`.

Задатак: Разломак у мешовит број

За дате природне бројеве a и b написати програм којим се дати неправи разломак $\frac{a}{b}$ преводи у мешовит број $n\frac{c}{b}$, такав да важи да је $\frac{c}{b} < 1$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број a који представља бројилац неправог разломка, а у другој линији природан број b различит од нуле који представља именилац разломка ($a \geq b$).

Излаз: Прва и једина линија стандардног излаза треба да садржи мешовити запис разломка, прецизније природан број, бројилац и именилац мешовитог броја међусобно раздвојени по једном празнином (бланко знаком).

Пример

Улаз	*Излаз*
23	2 7 8
8	

Решење

Мешовит број $n\frac{c}{b}$ представља вредност $n + \frac{c}{b} = \frac{n \cdot b + c}{b}$. У задатку тражимо мешовит број $n\frac{c}{b}$ који је једнак неправом разломку $\frac{a}{b}$ и према томе мора да важи $a = n \cdot b + c$. При том важи и $0 \leq c < b$ (јер важи да је $\frac{c}{b} < 1$, и зато је $c < b$, а уз то важи и $c \geq 0$). Зато је, на основу дефиниције целобројног количника, цео део n мешовитог броја једнак целобројном количнику при дељењу бројиоца a имениоцем b, бројилац c разломљеног дела мешовитог броја је остатак при дељењу a са b, док именилац b разломљеног дела мешовитог броја остаје исти као у полазном разломку.

```
a = int(input()) # polazni brojilac
b = int(input()) # polazni imenilac
n = a // b       # ceo deo
c = a % b        # novi brojilac (imenilac ostaje b)
print(n, c, b);
```

Задатак: Врста и колона

Спортисти на дресу имају бројеве $0, 1, 2, \ldots$. У том редоследу се ређају за дефиле за свечано отварање такмичења у коме корачају организовани у врсте од по 5. Напиши програм који на основу редног броја дреса одређује у којој ће се врсти и колони спортиста налазити (врсте и колоне се броје од један).

Улаз: Са улаза се уноси цео број x ($0 \leq x \leq 1000$) који представља број дреса спортисте.

Излаз: На стандардни излаз исписати број врсте и колоне раздвојене размаком.

Пример

Улаз	*Излаз*
17	4 3

Објашњење

```
0  1  2  3  4
5  6  7  8  9
10 11 12 13 14
15 16 17 18 19
20 21 ...
```

Као што се са слике види, спортиста са дресом 17 је у врсти број 4 и колони број 3.

Решење

Ако се спортиста са редним бројем x налази у врсти v и колони k тада се испред њега налази $(v-1)\cdot 5$ спортиста из претходних врста и $k-1$ спортиста из претходних колона текуће врсте. Зато је $x = 5(v-1)+(k-1)$. Пошто $k-1$ може бити 0, 1, 2, 3 или 4, важи да је $k-1 = x \bmod 5$ и да је $v-1 = x \operatorname{div} 5$. Заиста, елементи прве колоне су бројеви 0, 5, 10 итд. који сви имају остатак 0 при дељењу са 5, елементи друге колоне су бројеви 1, 6, 11 итд. који сви имају остатак 1 при дељењу са 5 итд. Слично, елементи прве врсте су бројеви од 0 до 4 који при целобројном дељењу са 5 дају количник 0, елементи друге врсте су бројеви од 5 до 9 који при целобројном дељењу са 5 дају количник 1 итд.

```
x = int(input())
print(x // 5 + 1, x % 5 + 1)
```

Задатак: Шаховска табла број црних поља

На шаховској табли ширине n и дужине m, горње лево поље је беле боје. Написати програм којим се одређује број црних поља на датој шаховској табли.

Улаз: На стандардном улазу налазе се два природна броја $n, m \leq 100$.

Излаз: Број црних поља на шаховској табли.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 3	7

Решење

На шаховској табли димензије $n \times m$ укупан број поља је $n \cdot m$. У сваком реду боја поља се наизменично мења. Редови почињу наизменично белом па црном бојом (први ред почиње белом бојом, други црном бојом, трећи ред белом, …). Ако је укупан број поља паран онда црних и белих поља има једнак број, а ако је укупан број поља непаран број белих поља је за 1 већи од броја црних поља (јер први ред почиње белим пољем). Према томе број црних поља једнак је целобројном количнику укупног броја поља и броја 2 тј. $(n \cdot m) \operatorname{div} 2 = \left\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \right\rfloor$. Подсетимо се да се целобројни количник израчунава оператором `//`.

```
n = int(input())
m = int(input())
brojCrnihPolja = (n * m) // 2
print(brojCrnihPolja)
```

Задатак: Икс-окс

Мирко је мали програмер који покушава да испрограмира игрицу икс-окс. Близу је завршетка, али му је потребна мала помоћ. Смислио је да корисник мишем одређује квадрат у који ће се његов симбол уписати. Поље за игру се састоји од 9 квадрата (распоређена у три врсте и три колоне) и сваки квадрат је димензије 100 пута 100 пиксела (укупно поље је димензије 300 пута 300 пиксела). Познат је положај пиксела на који је кликнуто мишем и потребно је одредити редни број квадрата у којем се тај пиксел налази. Положај пиксела је одређен редним бројевима (координатама) тог пиксела по хоризонтали и по вертикали, рачунајући од доњег

левог угла поља (пиксели се броје од 1 до 300). Квадрати се броје од 1 до 9, врсту по врсту, почевши од доњег левог угла поља, како је приказано на следећој слици:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају два цела броја (сваки у посебном реду) x и y ($1 \leq x, y \leq 300$) који представљају x тј. y координату пиксела на који је кликнуто мишем.

Излаз: На стандардни излаз се исписује један број од 1 до 9 који представља редни број квадрата.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**		**Пример 4**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`1`	`1`	`120`	`8`	`100`	`7`	`101`	`5`
`1`		`280`		`201`		`300`	

Задатак: По два и по три

Људи иду путем у колони два по два. На месту где је тротоар широк, престројили су се тако да иду три по три. При томе је редослед људи остао исти ако се посмтрају ред по ред слева на десно.

Напиши програм који одређује у ком реду и колони се после престројавања налази човек који је на почетку био у реду R и колони K (врсте и колоне се броје од један).

Улаз: У првом реду улаза је цео број R ($1 \leq R \leq 1000$), а у другом реду цео број K ($1 \leq K \leq 2$).

Излаз: На стандардни излаз исписати број врсте и колоне после престројавања, раздвојене размаком.

Пример 1

Улаз *Излаз*

```
2          1 3
1
```

Објашњење

```
a b        a b X
X d        d e f
e f        g h ...
g h
...
```

Човек који је био први у другом реду (означен словом X), након престројавања ће бити трећи у првом реду.

Пример 2

Улаз

```
5
2
```

Излаз

```
4 1
```

Објашњење

```
a b        a b c
c d        d e f
e f        g h i
g h        X k l
i X        ...
k l
...
```

Човек који је био други у петом реду (означен словом X), након престројавања ће бити први у четвртом реду.

2.3.2 Позициони запис

У позиционом запису бројева допринос цифре укупној вредности броја не зависи само од вредности цифре, већ и од њене позиције у запису. Запис $c_n c_{n-1} ... c_0$ у позиционом систему са основом b (то некад обележавамо са $(c_n c_{n-1} ... c_0)_b$) одговара броју

$$c_n \cdot b^n + c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot b + c_0,$$

при чему за сваку цифру c_i важи $0 \leq c_i < b$.

На пример број 1234 у основи 10 једнак је $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$.

Најчешће коришћени бројевни систем јесте декадни систем, односно систем са основом 10. Број x се у декадном систему може представити у облику $x = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10 + c_0$, где је c_0 цифра јединица, c_1 цифра десетица, c_2 цифра стотина итд. и за сваку од њих важи $0 \leq c_i \leq 9$.

За запис времена и углова користи се позициони запис у основи 60 (сат тј. угао има 60 минута, док један минут има 60 секунди).

Вредност броја се може одредити и помоћу Хорнерове шеме

$$(\ldots((c_n \cdot b + c_{n-1}) \cdot b + c_{n-2}) \cdot b + \ldots + c_1) \cdot b + c_0.$$

На пример број 1234 у основи 10 једнак је $((1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 4$.

Последња цифра у декадном запису броја може се одредити операцијом израчунавања остатка при дељењу са 10. На пример, последња цифра броја 1234 је 4, што је управо остатак при дељењу тог броја са 10. Слично, последња цифра записа броја у основи b може се одредити операцијом израчунавања остатка при дељењу броја са b. Докажимо ово и формално. Број x, чије су цифре редом $c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0$, представља се у облику $x = c_n \cdot b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot b + c_0$. Пошто су сви сабирци осим последњег дељиви са b, тј. број се може написати у облику $x = (c_n \cdot b^{n-1} + c_{n-1} \cdot b^{n-2} + \ldots + c_1) \cdot b + c_0$ и пошто је $0 \leq c_0 < b$, на основу дефиниције целобројног количника и остатка важи да је $x \bmod b$ једнако c_0.

Општије, цифру c_k уз коефицијент b^k у запису броја x можемо одредити као

$$(x \operatorname{div} b^k) \bmod b.$$

Докажимо и ово формално. Докажимо да важи да је $x \operatorname{div} b^k = c_n \cdot b^{n-k} + c_{n-1} \cdot b^{n-k-1} + \ldots + c_{k+1} \cdot b + c_k$. Заиста, важи да је $x = (c_n \cdot b^{n-k} + c_{n-1} \cdot b^{n-k-1} + \ldots + c_{k+1} \cdot b + c_k) \cdot b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \ldots + c_1 b + c_0$. Пошто за сваку цифру c_i важи $0 \leq c_i \leq b-1$, важи да је $c_{k-1} b^{k-1} + \ldots + c_1 b + c_0 \leq (b-1) \cdot (b^{k-1} + \ldots + b + 1) = b^k - 1$. Зато је $x \bmod b^k = c_{k-1} b^{k-1} + \ldots + c_1 b + c_0$, док је $x \operatorname{div} b^k = c_n \cdot b^{n-k} + c_{n-1} \cdot b^{n-k-1} + \ldots + c_{k+1} \cdot b + c_k$. Зато се до цифре c_k може доћи одређивањем остатка при дељењу овог броја са b (сви сабирци осим последњег су дељиви са b, док је $0 \leq c_k < b$).

Задатак: Збир цифара четвороцифреног броја

Напиши програм који учитава четвороцифрени број и исписује збир свих цифара тог броја.

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се четвороцифрени број.

Излаз: Збир цифара четвороцифреног броја.

Пример

Улаз	*Излаз*
`1234`	`10`

Решење

Збир цифара четвороцифреног броја се добија издвајањем цифара јединица, десетица, стотина и хиљада, које се затим саберу. Цифре броја можемо одредити на неколико различитих начина.

Кључна опаска је увек то да се последња цифра броја може одредити операцијом израчунавања остатка при дељењу са 10. На пример, последња цифра броја 1234 је 4, што је управо остатак при дељењу тог броја са 10.

Посебан израз за сваку цифру

До цифре јединица c_0 броја n може се лако доћи као $n \bmod 10$. На пример, цифра јединица броја 1234 је 4 и она се лако добија као остатак при дељењу броја 1234 са 10.

Последња цифра броја се лако може уклонити тако што се израчуна целобројни количник тог броја са 10. На пример, целобројни количник при дељењу броја 1234 са 10 је 123. Цифру десетица полазног броја можемо добити као цифру јединица броја који се добија када му се избрише последња цифра, а управо смо видели да је то број $n \operatorname{div} 10$. На пример, цифра десетица број 1234 је цифра јединица броја 123 и она је једнака $(n \operatorname{div} 10) \bmod 10$.

Последње две цифре броја се могу уклонити тако што се израчуна количник тог броја при дељењу са 100. На пример, целобројни количник при дељењу броја 1234 са 100 је 12. Цифру стотина полазног броја можемо добити као цифру јединица броја који се добија када му се избришу последње две цифре, а управо смо видели да је то број $n \operatorname{div} 100$. На пример, цифра стотина броја 1234 је цифра јединица броја 12 и она је једнака $(n \operatorname{div} 100) \bmod 10$.

Последње три цифре броја се могу уклонити тако што се израчуна количник тог броја при дељењу са 1000. На пример, целобројни количник при дељењу броја 1234 са 1000 је 1. Цифру хиљада полазног броја можемо добити као цифру јединица броја који се добија када му се избришу последње три цифре, а управо смо видели да је то број $n \operatorname{div} 1000$. На пример, цифра хиљада броја 1234 је цифра јединица броја 1 и она је једнака $(n \operatorname{div} 1000) \bmod 10$.

Уочава се веома јасна правилност.

```
# ucitavanje polaznog broja
broj = int(input())
# izracunavanje zbira cifara
cifra_jedinica = (broj // 1) % 10
cifra_desetica = (broj // 10) % 10
cifra_stotina  = (broj // 100) % 10
cifra_hiljada  = (broj // 1000) % 10
zbir_cifara = cifra_jedinica + cifra_desetica + \
              cifra_stotina + cifra_hiljada
# prikaz rezultata
print(zbir_cifara)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Јарди, стопе и инчи

У САД се дужина мери у јардима, стопама и инчима. Један јард има 3 стопе, а једна стопа има 12 инча. Написати програм који дужину унету у јардима, стопама и инчима прерачунава само у инче.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три цела броја, сваки у посебном реду. Број j ($0 \leq j \leq 10$) представља број јарди, број s ($0 \leq s \leq 2$) представља број стопа, а број i ($0 \leq i \leq 11$) представља број инча.

Излаз: На стандардни излаз исписати само један цео број који представља унету дужину изражену само у инчима.

Пример

Улаз	*Излаз*
7 2 5	281

Решење

Класична конверзија

Класичан поступак конверзије подразумева да се израчуна колико у једном јарду има инча ($3 \cdot 12 = 36$) и да се тај број помножи бројем јарди, да се број инча у једној стопи (12) помножи бројем стопа и на крају да се на збир ова два броја дода број инча. Тиме добијамо формулу $j \cdot 36 + s \cdot 12 + i$.

```
jardi = int(input())
stope = int(input())
inci = int(input())
u_incima = jardi * 36 + stope * 12 + inci
print(u_incima)
```

Хорнерова схема

У основи претходне формуле лежи један поступак који нам омогућава да поступно извршимо конверзију. Прво можемо да се запитамо колико стопа има у учитаној дужини. Пошто у једној јарди има 3 стопе у j јарди имамо $j \cdot 3$ стопа и поред тога имамо још s стопа. Укупан број стопа је зато једнак $j \cdot 3 + s$

Сада се можемо запитати колико укупно имамо инча. У свакој од стопа које смо мало пре израчунали има 12 инча и имамо још преосталих i инча. Зато је укупан број инча једнак $(j \cdot 3 + s) \cdot 12 + i$.

Овакав запис се назива Хорнерова схема и она се често користи за вредности бројева и полинома. На пример, вредност броја $123 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$, се Хорнеровом схемом може израчунати као $((1 \cdot 10) + 2) \cdot 10 + 3$, па и као $((0 \cdot 10 + 1) \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 3$. Осим што је понекада јаснија, предности Хорнерове схеме у односу на класичан поступак израчунавања биће јасно илустроване у поглављу о итеративним алгоритмима.

```
jardi = int(input())
stope = int(input())
inci = int(input())
u_incima = ((jardi * 3) + stope) * 12 + inci
print(u_incima)
```

Задатак: Октални бројеви

У рачунарству се често користе тзв. октални бројеви - бројеви записани у основи 8, коришћењем само цифара од 0 до 7. Напиши програм који врши конверзију четвороцифрених октални бројева у декадне вредности и обратно.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају 4 окталне цифре (свака у посебном реду, почевши од цифре највеће тежине) и након тога декадно записан природан број n ($0 \leq n < 8^4$).

Излаз: На стандардном излазу у првој линији исписати декадну вредност броја формираног од учитаних октални цифара, а у другој линији четвороцифрену октални репрезентацију броја n.

Пример

Улаз	*Излаз*
1	668
2	2322
3	
4	
1234	

Решење

За вредности броја на основу цифара се може употребити алгоритам заснован на класичној дефиницији позиционог записа (тада број израчунавамо као $c_3 \cdot 8^3 + c_2 \cdot 8^2 + c_1 \cdot 8^1 + c_0 \cdot 8^0$), док цифру на позицији i можемо израчунати као $(n \operatorname{div} 8^i) \bmod 8$.

Приликом имплементације је могуће дефинисати и користити функцију која на основу броја одређује цифре и функцију која на основу цифара одређује вредност броја (наравно, то није неопходно, али једном када се те функције дефинишу оне могу бити употребљене у разним задацима). Функција која одређује цифре броја враћа више вредности. У језику Пајтон можемо вратити уређену торку.

```
# odredjivanje vrednosti oktalnog zapisa (c3c2c1c0)8
def iz_oktalnog(c3, c2, c1, c0):
    return c3*8*8*8 + c2*8*8 + c1*8 + c0
```

```
# prevodjenje broja n u oktalni zapis (c3c2c1c0)8
def u_oktalni(n):
    c0 = (n // (1)) % 8;
    c1 = (n // (8)) % 8;
    c2 = (n // (8*8)) % 8;
    c3 = (n // (8*8*8)) % 8;
    return (c3, c2, c1, c0)

# izracunavanje vrednosti oktalno zapisanog broja
c3 = int(input())
c2 = int(input())
c1 = int(input())
c0 = int(input())
print(iz_oktalnog(c3, c2, c1, c0))

# izracunavanje cifara broja koji treba zapisati oktalno
n = int(input())
(c3, c2, c1, c0) = u_oktalni(n)
print(c3, c2, c1, c0, sep="")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Избаци цифру стотина

Напиши програм који из декадног записа броја избацује цифру стотина.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се један природан број мањи од милијарду.

Излаз: На стандардни излаз исписује се број добијен избацивањем цифре стотина из декадног записа унетог броја.

Пример

Улаз	*Излаз*
123456	12356

Решење

Пре избацивања цифре, одредимо префикс броја пре те цифре (део записа броја испред ње) и суфикс броја након те цифре (део записа броја иза ње). На пример, ако је број 123456, префикс пре цифре стотина је 123, а суфикс након ње је 56. Префикс се може одредити као целобројни количник овог броја са 1000, а суфикс као остатак при дељењу са 100. На крају ћемо на префикс дописати цифре суфикса. Пошто је суфикс двоцифрен, то ћемо урадити тако што ћемо префикс помножити са 100 и сабрати са суфиксом.

Докажимо ово и формално. Претпоставимо да је n облика $(c_k c_{k-1} \ldots c_3 c_2 c_1 c_0)_{10}$, тј.

$$n = c_k \cdot 10^k + \ldots c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$$

Овај број се може записати у облику $(c_k \cdot 10^{k-3} + \ldots + c_3) \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ и пошто важи да је $0 \leq c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0 < 1000$ (јер су све цифре између 0 и 9), на основу дефиниције целобројног количника, важи да је $n \operatorname{div} 1000 = c_k \cdot 10^{k-3} + \ldots + c_3$. Потпуно аналогно се доказује да је $n \bmod 100 = c_1 \cdot 10 + c_0$. На крају, важи да је

$$100 \cdot (n \operatorname{div} 1000) + n \bmod 100 = c_k \cdot 10^{k-1} + \ldots c_3 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$$

што је број $(c_k c_{k-1} \ldots c_3 c_1 c_0)_{10}$ који се добија од полазног брисањем цифре c_2.

```
n = int(input())
prefiks = n // 1000
sufiks = n % 100
print(100 * prefiks + sufiks)
```

Задатак: Поноћ

Напиши програм који за дато време у току дана одређује колико је секунди протекло од претходне поноћи и колико је сати, минута и секунди остало до следеће поноћи.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се три цела броја (сваки у посебном реду) који одређују један временски тренутак:

- h - сат ($0 \leq h < 24$)
- m - минут ($0 \leq m < 60$)
- s - секунд ($0 \leq s < 60$)

Излаз: На стандардни излаз исписати две линије. У првој исписати цео број који представља број секунди протеклих од претходне поноћи. У другој исписати три цела броја раздвојена двотачкама - број сати h_p ($0 \leq h_p < 24$), број минута m_p ($0 \leq m_p < 60$) и број секунди s_p ($0 \leq s_p < 60$) до наредне поноћи.

Пример

Улаз	*Излаз*
`10`	`37432`
`23`	`13:36:8`
`52`	

Решење

Изражавање времена преко броја секунди од почетка дана (претходне поноћи)

Један веома често коришћен начин је да се пре израчунавања све преведе у најмање јединице, а да се након израчунавања изврши прерачунавање у полазне јединице. То би подразумевало да се текући тренутак и наредна поноћ претворе у број секунди протекао од претходне поноћи, да се израчуна број секунди до поноћи и да се затим то време изражено само у секундама изрази у сатима, минутима и секундама.

Ако је време одређено бројевима h, m и s који представљају број сати, минута и секунди, тада се време протекло од почетка дана може израчунати тако што се саберу број сати помножен са $60 \cdot 60$ (јер у једном сату има 60 минута, а сваки од њих има 60 секунди), број минута помножен са 60 (јер у једном минуту има 60 секунди) и број секунди, тј. израчунавањем вредности $h \cdot 60^2 + m \cdot 60 + s$, што може да се уради било директно, било Хорнеровим поступком, како је објашњено у задатку Јарди, стопе и инчи. Приметимо да се овде ради о запису у бројевној основи 60. Хорнеров поступак би овде кретао прво од броја целих сати h, затим израчунавао број целих минута тако што би помножио број сати h са 60 и на то додао број m, а затим број секунди добио множећи тај број минута са 60 и сабирајући са s (тј. израчунао би вредност израза $(h \cdot 60 + m) \cdot 60 + s$). Наредна поноћ се може представити у облику времена 24:00:00 и она се може превести у секунде на потпуно исти начин (изразом $24 \cdot 60^2$).

Када се изврши одузимање, тада је добијени број секунди (рецимо да је то t_s) потребно претворити у сате, минуте и секунде. То се може урадити како је описано у задатку Збир цифара четвороцифреног броја, који укључују израчунавање остатака и количника при целобројном дељењу са бројевном основом која је у овом случају 60. Последња цифра (вредност s) може се одредити као остатак при дељењу броја t_s са 60 тј. $s = t_s \bmod 60$, претпоследња цифра m као остатак при дељењу са 60 целобројног количника бројева t_s и 60 тј. $m = (t_s \operatorname{div} 60) \bmod 60$, а прва цифра h као целобројни количник бројева t_s и 60^2 тј. $h = t_s \operatorname{div} 60^2$. Ако у полазном броју секунди има више од једног дана (у овом задатку то није могуће, али у неким другим задацима ће бити), тада је потребно још одредити остатак броја сати при дељењу са 24. Овим се, дакле, добија следећи поступак.

$$\begin{aligned} s &= t_s \bmod 60 \\ m &= (t_s \operatorname{div} 60) \bmod 60 \\ h &= (t_s \operatorname{div} 60^2) \bmod 24 \end{aligned}$$

```
# dan, minut i sekund
h = int(input())
m = int(input())
s = int(input())
# broj sekundi od prethodne ponoci
S = h*60*60 + m*60 + s
# broj sekundi od prethodne ponoci do sledece ponoci
Sponoc = 24*60*60
```

```
# broj sekundi preostalih do ponoci
S_do_ponoci = Sponoc - S
# prevodimo to vreme u sate, minute i sekunde
s_do_ponoci = (S_do_ponoci // (1))  % 60
m_do_ponoci = (S_do_ponoci // (60)) % 60
h_do_ponoci = (S_do_ponoci // (60*60)) % 24
# ispisujemo rezultat
print(S)
print(str(h_do_ponoci) + ":" + str(m_do_ponoci) + ":" + str(s_do_ponoci))
```

Приликом имплементације је могуће дефинисати и користити функције конверзије сати, минута и секунди у секунде и из секунди у сате, минуте и секунде (наравно, то није неопходно, али једном када се те функције дефинишу оне могу бити употребљене у разним задацима). Функција која конвертује минуте у сате и минуте враћа више вредности. У језику Пајтон можемо вратити уређену торку.

```
# za trenutak h:m:s odredjuje se broj sekundi S proteklih od
# prethodne ponoci
def u_sekunde(h, m, s):
    return h * 60 * 60 + m * 60 + s

# za dati broj sekundi S proteklih od prethodne ponoci, odredjuje se
# vremenski trenutak (sat h, minut m i sekund s)
def od_sekundi(S):
    s = (S // 1) % 60
    m = (S // 60) % 60
    h = (S // (60*60)) % 24
    return (h, m, s)

# dan, minut i sekund
h = int(input())
m = int(input())
s = int(input())
# broj sekundi od prethodne ponoci
S = u_sekunde(h, m, s)
print(S)
# broj sekundi od prethodne ponoci do sledece ponoci
Sponoc = u_sekunde(24, 0, 0)
# broj sati, minuta i sekundi do naredne ponoci
(h_do_ponoci, m_do_ponoci, s_do_ponoci) = od_sekundi(Sponoc - S);
print(h_do_ponoci, ":", m_do_ponoci, ":", s_do_ponoci, sep="")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Трајање вожње

Познати су сат, минут и секунд почетка и краја вожње аутобусом (вожња почиње и завршава се у једном дану). Написати програм који одређује колико сати, минута и секунди је трајала та вожња.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 бројева (сваки у засебном реду). Прво сат, минут и секунд почетка вожње, а затим сат, минут и секунд краја вожње. Сати су из интервала $[0, 24)$, а минути и секунди из интервала $[0, 60)$.

Излаз: На стандардни излаз се исписује један ред у коме су три броја раздвојена двотачком: h ($0 \leq h < 24$) - број сати, m ($0 \leq m < 60$) број минута и s ($0 \leq s < 60$) број секунди трајања вожње.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 59 8 3 1 14	0:2:6

Решење

Трајање вожње израчунава се тако што се од времена доласка одузме време поласка. Задатак, дакле, захтева израчунавање разлике између два временска тренутка за која знамо да су у оквиру једног дана.

Изражавање времена преко броја секунди од почетка дана

Један од уобичајених начина рада са временом је да се сваки временски тренутак изрази преко броја секунди протеклих од почетка тог дана (тј. од претходне поноћи). Ако је h број сати, m број минута и s број секунди, оба смера конверзије можемо реализовати као у задатку Поноћ.

```
# za trenutak h:m:s odredjuje se broj sekundi S proteklih od
# prethodne ponoci
def u_sekunde(h, m, s):
    return h * 60 * 60 + m * 60 + s

# za dati broj sekundi S proteklih od prethodne ponoci, odredjuje se
# vremenski trenutak (sat h, minut m i sekund s)
def od_sekundi(S):
    s = S % 60
    m = (S // 60) % 60
    h = S // (60 * 60)
    return (h, m, s)

# pocetak voznje
h_pocetak = int(input())
m_pocetak = int(input())
s_pocetak = int(input())

# kraj voznje
h_kraj = int(input())
m_kraj = int(input())
s_kraj = int(input())

# trajanje voznje
SPocetak = u_sekunde(h_pocetak, m_pocetak, s_pocetak)
SKraj = u_sekunde(h_kraj, m_kraj, s_kraj)
(h_trajanje, m_trajanje, s_trajanje) = od_sekundi(SKraj - SPocetak)
print(h_trajanje, ":", m_trajanje, ":", s_trajanje, sep = "")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: UNIX време

Од оперативног система UNIX време у рачунарима се изражава као број секунди протеклих од почетка епохе тј. од 1. јануара 1970. године. По узору на то, осмислили смо систем мерења времена у коме се време изражава бројем милисекунди протеклих од укључивања рачунара. У неком тренутку, на рачунару је пуштена песма. Ако је познато време када је песма пуштена и дужина трајања песме у милисекундама, напиши програм који одређује када је песма завршена.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се следећи цели бројеви (сваки у посебном реду):

- dan ($0 \leq dan \leq 10$), sat ($0 \leq sat < 24$), min ($0 \leq min < 60$), sek ($0 \leq sek < 60$), $mili$ ($0 \leq mili < 1000$) - број дана, сати, минута, секунди и милисекунди протеклих од тренутка укључивања рачунара

до пуштања песме.
- $trajanje$ ($0 \leq trajanje \leq 1000000$) - број милисекунди колико траје песма.

Излаз: На стандардни излаз исписати следеће целе бројеве, раздвојене двотачкама:

- dan ($0 \leq dan \leq 100$), sat ($0 \leq sat < 24$), min ($0 \leq min < 60$), sek ($0 \leq sek < 60$), $mili$ ($0 \leq mili < 1000$) - број дана, сати, минута, секунди и милисекунди протеклих од тренутка укључивања рачунара до завршетка песме.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3 10 15 23 843 100000	3:10:17:3:843

Пример 2

Улаз	*Излаз*
4 23 59 59 517 12345	5:0:0:11:862

Пример 3

Улаз	*Излаз*
10 23 59 59 999 1000000	11:0:16:39:999

Решење

Као и обично, увешћемо функције за конверзију времена датог у данима, сатима, минутима, секундама и милисекундама у број милисекунди од укључивања рачунара и броја милисекунди у време, све свести на милисекунде, извршити тражену операцију сабирања времена и на крају, милисекунде превести у време у данима, сатима, минутима, секундама и милисекундама. Сличну технику, али само за сате, минуте и секунде, применили смо, на пример, у задатку Поноћ.

Најприроднији начин да време преведемо у милисекунде је да употребимо Хорнерову шему, коју смо описали у задатку Јарди, стопе и инчи. Укупан број сати можемо добити тако што број дана помножимо са 24 (јер је толико сати у једном дану) и додамо број сати. Укупан број минута можемо добити тако што тако добијени број сати помножимо са 60 (јер је толико минута у једном сату) и додамо број минута. Укупан број секунди можемо добити тако што тако добијени број минута помножимо са 60 (јер је толико секунди у једном минуту) и додамо број секунди. На крају, укупан број милисекунди можемо добити тако што добијени број секунди помножимо са 1000 (јер је толико милисекунди у једној секунди) и додамо број милисекунди. Дакле, ако променљиве dan, sat, min, sek и $mili$ представљају број дана, сати, минута, секунди и милисекунди, тада конверзију можемо извршити помоћу израза

$$(((dan \cdot 24 + sat) \cdot 60 + min) \cdot 60 + sek) \cdot 1000 + mili$$

Ово је много лепше решење него да, на пример, унапред рачунамо колико милисекунди има у једном сату.

Конверзија у супротном смеру тече тако што се рачуна једна по једна цифра у запису у овој мешовитој основи (слично као у задацима Збир цифара четвороцифреног броја и Поноћ) (касније ћемо видети да и за ово постоји елегантније решење).

```
# prevodi broj dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi u broj
# milisekundi
def u_milisekunde(dan, sat, min, sek, mili):
    # Hornerova sema
    return (((dan * 24 + sat) * 60 + min) * 60 + sek) * 1000 + mili

# prevodi milisekunde u dane, sate, minute, sekunde i milisekunde
def od_milisekundi(v):
    mili = (v // 1) % 1000
    sek = (v // 1000) % 60
    min = (v // (1000 * 60)) % 60
    sat = (v // (1000 * 60 * 60)) % 24
    dan = v // (1000 * 60 * 60 * 24)
    return (dan, sat, min, sek, mili)

# početak pesme izrazen u broju dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi
# od uključivanja računara
pocetak_dan = int(input())
```

```
pocetak_sat = int(input())
pocetak_min = int(input())
pocetak_sek = int(input())
pocetak_mili = int(input())

# trajanje pesme u milisekundama
trajanje = int(input())

# početak pesme izražen u broju milisekundi od uključivanja racunara
pocetak = u_milisekunde(pocetak_dan, pocetak_sat, pocetak_min,
                        pocetak_sek, pocetak_mili)
# kraj pesme izražen u broju milisekundi od uključivanja računara
kraj = pocetak + trajanje
# kraj pesme izrazen u broju dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi
(kraj_dan, kraj_sat, kraj_min, kraj_sek, kraj_mili) = \
    od_milisekundi(kraj)
# ispis rezultata
print(kraj_dan, ":", kraj_sat, ":", kraj_min, ":",
      kraj_sek, ":", kraj_mili, sep="")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Угао сатне казаљке

Ако је дат угао који сатна казаљка заклапа са вертикалном полуправом која спаја центар и врх сата (број 12), одредити време у сатима и минутима.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се цео број који представља угао у степенима.

Излаз: На стандардни излаз исписати два цела броја h ($0 \leq h < 12$) и m ($0 \leq m < 60$) који представљају број сати и минута који су најближи положају сатне казаљке.

Пример		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`90`	`3:0`	`200`	`6:40`

Решење

За разлику од секундне казаљке која се креће дискретно (поскочи сваке секунде), сатна казаљка се обично креће непрекидно. Ипак, пошто у овом задатку не разматрамо секунде, већ само минуте, претпоставићемо да се сатна казаљка помера само једном у минуту (на сваком пуном минуту). Дакле, положај сатне казаљке ће бити одређен временом протеклим од претходног тренутка када је сатна казаљка била усмерена на горе (а то је претходна поноћ или претходно подне) израженим у целом броју минута.

Ако се зна колико је тренутно сати и минута, тај број се може лако израчунати (број сати се помножи са 60 и сабере се са бројем минута, слично као у задатку Поноћ). Пошто угао казаљке линеарно зависи од броја протеклих минута, и пошто на сваких 12 сати сатна казаљка направи пун круг, тј. опише угао од 360 степени, важи пропорција

$$\alpha^\circ : M = 360^\circ : 12\,\mathrm{h},$$

где је M број минута протеклих од претходног тренутка када је сатна казаљка заклапала 0° (а то је претходно подне или поноћ). M се, дакле, може израчунати тако што се тих 12h (тј. 12 сати и 0 минута) претвори у број минута протеклих од претходне поноћи или поднева и реши се пропорција

$$M = \frac{\alpha^\circ \cdot (12 \cdot 60\,\mathrm{min})}{360^\circ} = \frac{\alpha^\circ \cdot 720\,\mathrm{min}}{360^\circ} = \alpha \cdot 2\,\mathrm{min}.$$

Када се зна број минута протеклих од претходног поднева или поноћи, време се лако може израчунати (остатак при дељењу са 60 даје број минута, а количник број сати, слично као у задатку Поноћ).

```
# za dati broj sati i minuta odredjuje broj minuta od prethodnih
# 00:00 sati
def u_minute(h, m):
    return 60 * h + m

# za dati broj minuta proteklih od prethodnih 00:00 sati odredjuje
# broj sati i minuta
def od_minuta(M):
  m = M % 60
  h = M // 60
  return (h, m)

# alfa - ugao kazaljke u celom broju stepeni
alfa = int(input())
# M - broj minuta proteklih od prethodnih 00:00 sati
# vazi proporcija da je M : alfa = hm_to_M(12, 00) : 360 stepeni
M = alfa * u_minute(12, 00) // 360
# broj sati i minuta koji odgovaraju tom broju minuta
(h, m) = od_minuta(M)
# ispis rezultata
print(h, ":", m, sep = "")
```

Један начин да се дође до решења је да се закључи да, пошто за 12 сати сатна казаљка обиђе угао од 360 степени, она за један сат обиђе дванаестину тог угла тј. угао од $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Пошто један сат има 60 минута, за један временски минут она обиђе шездесетину угла који пређе за сат времена, тј. угао од $\frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ$. Дакле, пошто за један временски минут казаљка пређе пола степена, једном степену одговара 2 минута времена. Број минута протеклих од поднева или поноћи се онда може израчунати множењем датог угла у степенима са 2 (минута по степену).

```
# za dati broj minuta proteklih od prethodnih 00:00 sati odredjuje
# broj sati i minuta
def od_minuta(M):
  m = M % 60
  h = M // 60
  return (h, m)

# ugao kazaljke u realnom broju stepeni
alfa = int(input())
# M - broj minuta proteklih od prethodnih 00:00 sati
# posto u 12 sati ima 12*60 = 720 minuta, vazi proporcija
# tj. M : alfa = 720 : 360 = 2 : 1
M = alfa * 2
# broj sati i minuta koji odgovaraju tom broju minuta
(h, m) = od_minuta(M)
# ispis rezultata
print(h, ":", m, sep = "")
```

Задатак: Угао између казаљки

Одредити угао у степенима и минутима између сатне и минутне казаљке ако је задато време у сатима и минутима. Угао је увек позитиван и мери се у смеру кретања казаљки на сату (зато може да буде и већи од 180 степени).

Улаз: Учитавају се два броја, сваки у посебној линији. У првој линији је број сати (између 0 и 12), а у другој линији је број минута (између 0 и 59).

Излаз: Степен угла 0 до 359, и минут угла од 0 до 59, раздвојени двотачком тј. карактером `:`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1 30	135:0

Пример 2

Улаз	*Излаз*
12 30	165:0

Решење

Нека је дати временски тренутак описан параметрима sat и $minut$.

Угао који минутна казаљка заклапа у односу на почетни положај од нула минута (такозвани угаони отклон минутне казаљке) једнак је $minut \cdot 360'$, где $'$ означава угаони минут. Заиста, на сваки минут времена минутна казаљка се помера за $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Дакле, 6° је померање минутне казаљке у степенима по сваком временском минуту, а пошто у једном степену има 60 угаоних минута тј. пошто је $1^\circ = 60'$, за сваки минут времена минутна казаљка се помери за $6^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} = 360'$, тј. за 360 угаоних минута.

Угао који у датом временском тренутку заклапа сатна казаљка са позитивним смером у осе рачунат је у задатку Угао сатне казаљке. Подсетимо се, угао у угаоним минутима који сатна казаљка заузима у односу на положај 12 h (угаони отклон сатне казаљке) једнак је $sat \cdot 30^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} + minut \cdot 30'$. Заиста на сваки сат казаљка се помери за $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, а пошто у једном степену има $60'$, то је једнако $30^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ}$. На сваки минут времена сатна казаљка се помери додатно за $\frac{30^\circ}{60} = 30'$. Заиста, она се за један минут времена помери 12 пута мање него минутна казаљка, за коју смо установили да се за минут времена помери за $360'$. Дакле сатна казаљка се за сваки минут времена помери за $30'$.

Да би се израчунао (неоријентисани) угао између казаљки изражен у минутима потребно је одредити апсолутну вредност разлике у угаоним минутима. На крају је добијени резултат потребно превести у степене и минуте.

```
# ucitavamo vreme
sat = int(input())
minut = int(input())
# sat svodimo na interval [0, 12)
sat = sat % 12
# ugao u minutima koji satna kazalja zauzima sa polozajem 12h
ugaoniMinutiSatneKazaljke = sat * 30 * 60 + minut * 30
# ugao u minutima koji minutna kazaljka zauzima sa polozajem 12h
ugaoniMinutiMinutneKazaljke = minut * 360
# ugao izmedju satne i minutne kazaljki u minutima
ugaonaRazlikaUMinutima = abs(ugaoniMinutiSatneKazaljke -
                             ugaoniMinutiMinutneKazaljke)
# ugao izmedju kazaljki u stepenima i minutima
stepenUgaoneRazlike = ugaonaRazlikaUMinutima // 60
minutUgaoneRazlike = ugaonaRazlikaUMinutima % 60
# ispis rezultata
print(stepenUgaoneRazlike, ":", minutUgaoneRazlike, sep="")
```

Задатак можемо решити и дефинисањем помоћних функција за превођење времена у минуте и назад и превођење угла у угаоне минуте и директном применом пропорције унутар програма.

Задатак: Размени цифре

Напиши програм којим се у датом природном броју размењује цифра јединица и цифра стотина. За број са мање од три цифре сматрамо да су недостајуће цифре једнаке 0.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број мањи од милијарде.

Излаз: На стандардни излаз исписати број добијен после размене цифре јединица и цифре стотина.

Пример

Улаз	*Излаз*
2349	2943

Задатак: Бројање оваца

Три пастира Јован, Дуле и Станоје броје стадо од највише 120 оваца на крају сваког дана, на прсте десне руке. Броје сва тројица на следећи начин:

- Јован броји једну по једну овцу на прсте десне руке. Сваки пут кад изброји пет оваца он каже Дулету да изброји још један прст на својој десној руци, а Јован крене бројање од почетка.
- Дуле броји један по један прст само кад му Јован то каже. Када Дуле изброји до пет он каже Станоју да изброји још један прст на својој десној руци, а Дуле крене бројање од почетка.
- Станоје броји један по један прст само кад му Дуле то каже.

Када заврше бројање сваки од њих прстима десне руке показује број између 0 и 4. Написати програм који пастирима помаже да на основу броја отворених прстију сва три пастира редом израчунају колико стадо има оваца.

Улаз: На стандардном улази налазе се 3 цела броја из интервала $[0, 4]$ која редом представљају број отворених прстију десне руке наших пастира Јована, Дулета и Станоја.

Излаз: На стандардном излазу у једној линији приказати број оваца у стаду.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 1 3	83

Задатак: Обрни цифре

Са стандардног улаза се уноси природан број n. Напиши програм који на стандардни излаз исписује број који се добија када се обрне редослед последње 4 цифре броја n.

Улаз: Позитиван цео број мањи од 10^9.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1234567	1237654

Пример 2

Улаз	*Излаз*
123	3210

Задатак: Цифре сдесна

Петар и Марко се играју игре меморије. Петар диктира Марку цифре једног броја, једну по једну, отпозади, кренувши од цифре јединица. Напиши програм који помаже Марку да одреди број чије цифре Петар диктира.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се 6 декадних цифара, свака у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - број чије цифре су унете са стандардног улаза.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1 2 3 4 5 6	654321

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0 1 2 2 1 0	12210

Задатак: Чекање

Два стара другара су договорила да се нађу у центру града. Познато је време (у облику сата, минута и секунде) када је свако од њих дошао на састанак (оба времена су у једном дану). Напиши програм који одређује колико дуго је онај који је први стигао чекао оног другог.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси шест целих бројева (сваки је задат у посебном реду). Сат (између 0 и 23), минут (између 0 и 59) и секунд (између 0 и 59) доласка првог човека и сат, минут и секунд доласка другог човека. Подаци представљају исправно задате временске тренутке у оквиру једног дана.

Излаз: На стандардни излаз исписати број сати, минута и секунди колико је онај другар који је први дошао чекао другог. Бројеве исписати у једном реду, раздвојене двотачком.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 45 20 7 23 50	3:38:30

Задатак: Тркачи

Два тркача трче по кружној стази дужине $s\,\mathrm{km}$, један брзином од $v_1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, други брзином од $v_2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Колико ће времена требати бржем тркачу да за цео круг престигне споријег?

Улаз: Подаци на две децимале:

- s - дужина кружне стазе ($1 \leq s \leq 10$)
- v_1 - брзина првог тркача ($1 \leq v_1 \leq 45$)
- v_2 - брзина другог тркача ($1 \leq v_2 \leq 45$)

Излаз: Целобројне вредности броја сати, минута и секунди, које представљају време потребно да спорији тркач за цео круг сустигне споријег. Секунде приказати заокружене на најближу целобројну вредност.

Пример

Улаз	*Излаз*
10.00 5.00 6.00	10 0 0

Задатак: Радијани

У математици се мера угла често изражава у радијанима. Угао чија је мера један радијан је онај угао чија је дужина лука једнака полупречнику. Напиши програм који за дати реалан број радијана израчуна најближи угао у степенима, минутима и секундама (целобројним).

Улаз: Са стандардног улаза уноси се позитиван реалан број радијана.

Излаз: На стандардни излаз исписати три цела броја $stepeni$ ($0 \leq stepeni < 360$), $minuti$ ($0 \leq minuti < 60$) и $sekundi$ ($0 \leq sekundi < 360$), раздвојена двотачкама, који представљају угао у степенима, минутима и секундама најближи датом углу у радијанима.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1.57	89:57:16

Пример 2

Улаз	*Излаз*
1000	55:46:46

Задатак: Гпс

Марија је нашла географске координате на којима се налази закопано благо, међутим њен GPS уређај подржава географске координате унете као децимални број степени, док су координате које она има дате у броју степени, минута и секунди. Напиши програм који ће Марији помоћи да преведе координате.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се три цела броја:

- st ($0 \leq st < 360$) - број степени
- min ($0 \leq min < 60$) - број минута
- sek ($0 \leq sek < 60$) - број секунди

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља угао у степенима (толеранција грешке је 10^{-5}).

Пример

Улаз	*Излаз*
18 19 20	18.32222

Задатак: Поклапање казаљки

Ако сат показује тачно x сати, написати програм који одређује после колико минута ће се први пут поклопити велика и мала казаљка.

Улаз: Број сати од 0 до 11.

Излаз: У минутима заокруженим на најближу целобројну вредност од 0 до 60.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
2	11

Пример 2

Улаз	*Излаз*
11	60

Глава 3

Гранање

У овој глави приказаћемо како се могу решавати разни задаци у којима ток извршавања програма зависи од испуњености одређених услова. За такве програме кажемо да имају *разгранату структуру* и да се у њима врши *гранање*.

3.1 Елементи програмског језика

У наставку ћемо описати елементе језика Пајтон који се користе у програмима разгранате структуре.

3.1.1 Релацијски оператори

Често је потребно утврдити да ли су неке две вредности међусобно једнаке или за неке две вредности утврдити која је од њих већа. За поређење вредности промењивих или израза користе се **релацијски оператори**.

- Основни релацијски оператор је оператор провере једнакости `==`. На пример, ако желимо да испитамо да ли промењиве `a` и `b` имају исту вредност то се може постићи релацијским изразом `a == b`. Вредност овог израза је типа `bool` и најчешће се користи приликом гранања (о коме ће ускоро бити речи), али се, такође, вредност релацијског израза може и доделити промењивој. Дешава се да се приликом писања кода направи грешка и уместо оператора провере једнакости `==` искористи оператор доделе `=`. Напоменимо још и то да поређење два реална броја може произвести понашање које је другачије од очекиваног због непрецизности записа реалних вредности.
- Поред провере једнакости, можемо вршити проверу да ли су две вредности различите. То се постиже оператором `!=`. Дакле, услов да промењиве `a` и `b` имају различиту вредност записује се као `a != b`.
- За поређење да ли је једна вредност мања, мања или једнака, већа, већа или једнака од друге вредности користе се редом релацијски оператори `<, <=, >, >=`.

Очекивано, релацијски оператори су нижег приоритета у односу на аритметичке операторе, односно у изразу `2+3 == 6-1` би се најпре израчунале вредности `2+3` и `6-1` а тек онда би се проверавала једнакост ове две израчунате вредности. Такође оператори `<, <=, >, >=` су вишег приоритета од оператора `==` и `!=`. Сви релацијски оператори су лево асоцијативни.

3.1.2 Логички оператори

За запис сложених услова користимо **логичке операторе**. Логички оператори примењују се на операнде који су типа `bool` и дају резултат типа `bool`. Они су нижег приоритета у односу на релационе и аритметичке операторе.

- Оператор логичке конјункције `and` користи се за утврђивање да ли истовремено важи неки скуп услова. На пример, вредност израза `2 < 3 && 2 > 1` је `True`, а вредност израза `2 < 3 && 2 < 1` је `False`.
- Други основни логички оператор је оператор логичке дисјункције `or`. Њиме се утврђује да ли је тачан бар један од датих услова. На пример, израз `2 < 3 || 2 < 1` има вредност `True`, а израз `2 > 3 || 2 < 1` вредност `False`.

- Оператор `not` даје логичку негацију. На пример, израз `!(1 < 3)` има вредност `False`, која је супротна од вредности `True` израза `1 < 3`.

Операције логичке конјункције и дисјункције дефинисане су следећим таблицама.

and	False	True
False	False	False
True	False	True

or	False	True
False	False	True
True	True	True

not	
False	True
True	False

Оператор логичке конјункције је вишег приоритета од оператора логичке дисјункције. Дакле у изразу `a or b and c` би се прво израчунала вредност израза `b and c`, а онда би се извршила операција логичке дисјункције промењиве `a` и вредности претходног израза. Оба бинарна логичка оператора су лево асоцијативна.

И за оператор конјункције и за оператор дисјункције карактеристично је **лењо израчунавање** – иако су поменути оператори бинарни, вредност другог операнда се не рачуна, уколико је вредност комплетног израза одређена вредношћу првог операнда. Дакле, приликом израчунавања вредности израза `A and B`, уколико је вредност израза `A` једнака `False`, не израчунава се вредност израза `B`; слично, приликом израчунавања вредности израза `A or B`, уколико је вредност израза `A` једнака `True`, не израчунава се вредност израза `B`.

3.1.3 Наредба if

Већина програмских језика, па и Пајтон, располаже наредбом гранања. Циљ гранања јесте да се на основу испуњености (или неиспуњености) неког услова одреди коју наредну наредбу треба извршити (одатле потиче и назив гранање).

Основни облик наредбе гранања у језику Пајтон је:

```
if uslov:
   naredba1
else:
   naredba2
```

У овом случају, ако је испуњен услов `uslov` биће извршена прва наредба, а ако услов није испуњен биће извршена друга наредба. Наравно, уместо појединачне наредбе, може се јавити и блок наредби наведен увучено. На пример, исписивање да ли је дати број паран или непаран може имати следећи облик:

```
if broj % 2 == 0:
   print(”paran”)
else:
   print(”neparan)
```

Ставка `else` није обавезан део наредбе гранања. Дакле, ако бисмо хтели да испишемо да је број паран ако јесте паран, а ако није да не исписујемо ништа, то бисмо могли да постигнемо наредном наредбом:

```
if broj % 2 == 0:
   print(”paran”)
```

3.1.4 Условни израз

Уместо наредбе гранања некада је погодније искористити условни израз (израз гранања).

Условни израз има следећу форму:

```
rezultat_tacno if uslov else rezultat_netacno
```

Овај оператор је тернарни, односно има три аргумента: први је вредност израза ако је услов испуњен, други аргумент је услов од кога зависи коначна вредност израза, док се трећим аргументом задаје вредност израза ако услов није испуњен. На пример, исписивање парности задатог броја могло би да се реализује и коришћењем израза гранања:

```
print(”paran” if broj % 2 == 0 else ”neparan”)
```

Оператор гранања је десно асоцијативан и нижег приоритета у односу на скоро све остале операторе (приоритетнији је једино од оператора доделе).

3.2 Једноставно гранање

Задаци који следе у наставку захтевају гранање на основу појединачних услова тј. до решења се долази ако се испита да ли неки услов важи или не важи.

3.2.1 Релацијски оператори

За решавање наредне групе задатака довољно је формулисати и испитати просте услове коришћењем аритметичких и релацијских оператора.

Задатак: Јабуке

Пера и Мика су брали јабуке. Пера је убрао p, а Мика m јабука. Напиши програм који проверава да ли је Пера успео да набере више јабука него Мика.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се два природна броја (сваки у посебном реду). У првом реду број јабука које је убрао Пера, а у другом број јабука које је убрао Мика.

Излаз: Исписати на стандардном излазу: `DA` - ако је Пера убрао више јабука од Мике, а `NE` - ако Пера није убрао више јабука од Мике.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`73`	`DA`	`48`	`NE`	`35`	`NE`
`10`		`48`		`56`	

Решење

Задатак решавамо тако што проверимо да ли је број јабука које је убрао Пера већи од броја јабука који је убрао Мика. Ако јесте испишемо `DA`, а у супротном испишемо `NE`.

Један начин да се реализује гранање у програму је да се употреби наредба `if-else`.

```
p = int(input())  # broj Perinih jabuka
m = int(input())  # broj Mikinih jabuka
if p > m:
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Гранање се у овом случају може реализовати и помоћу условног израза.

```
p = int(input()) # broj Perinih jabuka
m = int(input()) # broj Mikinih jabuka
print("DA" if p > m else "NE")
```

Задатак: Збир година браће и сестре

Пера, Мика и Лаза су три брата рођена у истом дану, а Ана је њихова 3 године старија сестра. Написати програм којим се проверава да ли унети број може бити збир њихових година.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се један позитиван природан број мањи од 500.

Излаз: На стандардном излазу приказати реч `da` ако унети број може бити збир година Пере, Мике, Лазе и Ане, а ако не може приказати реч `ne`.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`27`	`da`	`30`	`ne`

Решење

Пера, Мика и Лаза су рођени исте године, па имају једнак број година. Обележимо са x број година сваког од браће. Ана је за 3 године старија од своје браће па је њен број година $x + 3$. Према томе збир њихових година је $3 \cdot x + (x + 3) = 4 \cdot x + 3$. Потребно је проверити да ли унети број n може бити збир њихових година тј. потребно је проверити да ли за неки ненегативан цео број x (број година је ненегативан цео број) важи једнакост $4 \cdot x + 3 = n$. Решење једначине је $x = \frac{n-3}{4}$, то је ненегативан цео број акко је $n - 3$ дељиво

са 4 (није потребно проверавати да ли је $n - 3 \geq 0$ јер за природан број n ако је $n - 3 < 0$ онда $n - 3$ није дељиво са 4).

Проверу дељивости можемо извршити тако што израчунамо целобројни остатак при дељењу (оператором %) и проверимо да ли је једнак нули.

Гранање можемо извршити наредбом гранања `if-else`.

```
n = int(input())  # zbir godina tri brata i sestre
if (n - 3) % 4 == 0:
   print("da")
else:
   print("ne")
```

Гранање се у овом случају може реализовати и помоћу условног израза.

```
n = int(input()) # zbir godina tri brata i sestre
print("da" if (n - 3) % 4 == 0 else "ne")
```

Задатак: Теме правоугаоника

Дате су координате три темена правоугаоника са целобројним координатама чије су странице паралелне координатним осама. Темена су дата у произвољном редоследу. Написати програм којим се одређују координате четвртог темена.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се целобројне координате три темена правоугаоника - у сваком реду по два податка (координата x и координата y), раздвојена размаком.

Излаз: x и y координата траженог темена раздвојене размаком.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5 7 5 7 9	3 9

Решење

Уочимо да када су странице правоугаоника паралелне координатним осама, његов леви пар темена има исту апсцису (x-координату) и десни пар темена има исту апсцису. Аналогно важи да горњи пар темена правоугаоника има исту ординату (y-координату) и доњи пар темена има исту ординату. Према томе, када провером једнакости установимо да два темена имају исту x-координату, тражено теме припада другом пару са истом x-координатом, па исписујемо x-координату темена које није учествовало у провери. На исти начин долазимо до непознате y-координате.

У језику Пајтон треба обратити пажњу на то да се парови бројева учитавају из једне линије.

```
# koordinate tri poznata temena
(x1, y1) = map(int, input().split())
(x2, y2) = map(int, input().split())
(x3, y3) = map(int, input().split())

# odredjujemo nepoznatu apscisu x4
if x1 == x2:
    x4 = x3
if x1 == x3:
    x4 = x2
if x2 == x3:
    x4 = x1
# odredjujemo nepoznatu ordinatu y4
if y1 == y2:
    y4 = y3
if y1 == y3:
    y4 = y2
if y2 == y3:
```

```
    y4 = y1

# ispisujemo trazene koordinate
print(x4, y4)
```

Задатак: Једнакостранични троугао датог обима

Дате су целобројне дужине трију страница троугла. Написати програм којим се проверава да ли постоји једнакостранични троугао целоборојне дужине страница истог обима као дати троугао и која му је дужина странице.

Улаз: На стандарном улазу налазе се 3 природна броја која представљају странице троугла.

Излаз: Једна линија стандарног излаза садржи реч `da` ако постоји тражени троугао, за којом одвојено празнином, следи дужина странице тог троугла, ако тражени троугао не постоји садржи реч `ne`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`3`	`da 4`
`4`	
`5`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`4`	`ne`
`6`	
`9`	

3.2.2 Логички оператори

За решавање наредне групе задатака пожељно је искомбиновати одређен број услова коришћењем логичких оператора.

Задатак: Радно време

Радно време једне организације је између 9 и 17 часова. Одредити да ли је послати мејл стигао у току радног времена.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја, сваки у посебном реду, који представљају сат и минут приспећа мејла.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако је мејл стигао у току радног времена тј. `ne` ако није (9:00 спада у радно време, док 17:00 не спада).

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`14`	`da`
`53`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`17`	`ne`
`01`	

Решење

Мејл је стигао током радног времена ако и само ако је сат у интервалу $[9, 17)$ тј. ако је већи или једнак 9 и строго мањи од 17 (број минута је небитан).

Иако математичка нотација допушта да се запише услов $a \leq c < b$, у програмским језицима такав запис најчешће није исправан. Пајтон је изузетак. У језику Пајтон тај услов се може записати као `a <= c and c < b` или као `a <= c < b` (пошто у неким језицима попут језика C или C++ овај други облик доводи до опасне грешке, препоручујемо да се он избегава).

Наравно, слично бисмо поступили и у случају потпуно отворених или потпуно затворених интервала, једино треба правилно одабрати одговарајући релацијски оператор ($<$ или $\leq$).

```
sat = int(input()); minut = int(input())
if 9 <= sat and sat < 17:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Задатак: Кућни ред

Кућни ред забрањује прављење буке пре 6 часова, између 13 и 17 часова и након 22 часа. Напиши програм који радницима говори да ли у неком датом тренутку могу да изводе бучније радове.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси цео број између 0 и 23 који представља сат.

Излаз: На стандардни излаз исписати поруку `moze` ако је дозвољено изводити бучне радове тј. `ne moze` ако није.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5	ne moze

Пример 2

Улаз	*Излаз*
6	moze

Пример 3

Улаз	*Излаз*
13	ne moze

Решење

Једно решење можемо засновати на томе да су радови дозвољени ако и само ако сат припада интервалу $[6, 13)$ или $[17, 22)$. Припадност интервалу смо већ тестирали у задатку Радно време.

```
sat = int(input())
if (6 <= sat and sat < 13) or \
   (17 <= sat and sat < 22):
    print(”moze”)
else:
    print(”ne moze”)
```

Друго решење можемо засновати на томе да радови нису дозвољени ако и само ако је сат мањи од шест, ако припада интервалу $[13, 17)$ или је већи или једнак 22.

```
sat = int(input())
if sat < 6 or (13 <= sat and sat < 17) or (sat >= 22):
    print(”ne moze”)
else:
    print(”moze”)
```

Задатак: Постоји ли троугао датих дужина страница

Написати програм којим се проверава да ли постоји троугао са датим дужинама страница.

Улаз: На стандарном улазу налазе се три реална позитивна броја, сваки у посебној линији. Бројеви представљају дужине страница a, b, c.

Излаз: Једна линија стандарног излаза која садржи реч `da` ако постоји троугао, иначе садржи реч `ne`.

Пример

Улаз	*Излаз*
4.3 5.4 6.7	da

Решење

Познато је да је дужина сваке странице троугла мања од збира дужина друге две странице (ова особина се назива *неједнакост троугла*). Да би троугао са дужинама страница a, b и c постојао, довољно је да важи $a < b + c$, $b < a + c$ и $c < a + b$. Ако важе сва три услова постоји троугао са датим страницама, иначе не постоји такав троугао. Бројеви a, b и c су по претпоставци задатка позитивни, тако да тај услов није неопходно посебно проверавати.

Напоменимо и да се неједнакост троугла некада помиње и у облику у којем се тражи да је разлика дужина сваке две странице мања од дужине треће странице, но, тај услов није потребно посебно проверавати јер он следи из услова за збир страница (на пример, ако се покаже да је $a < b + c$, тада важи и да је $a - b < c$ и да је $a - c < b$).

Пошто сва три услова треба да важе, могуће је повезати их оператором логичке конјункције (оператором *и* тј. `&&`).

```
# ucitavamo duzine stranica
a = float(input())
b = float(input())
c = float(input())

# proveravamo da li postoji trougao sa duzinama stranica a, b i c
```

```
if a < b + c and b < a + c and c < a + b:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Вежбе ради, проверу можемо издвојити и у засебну функцију (коју онда можемо употребити и у наредним програмима).

```
# provera da li postoji trougao sa stranicama duzine a, b i c
def postoji_trougao(a, b, c):
    return a + b > c and b + c > a and a + c > b

# ucitavamo duzine stranica trougla
a = float(input())
b = float(input())
c = float(input())

# proveravamo da li postoji trougao sa duzinama stranica a, b i c
if postoji_trougao(a, b, c):
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Преступна година

Напиши програм који проверава да ли је унета година преступна.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број године између 1900 и 2200.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако је година преступна тј. `ne` ако није.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`2004`	`da`	`2017`	`ne`

Решење

По грегоријанском календару, који је у званичној употреби, година је преступна ако је дељива са 4, а није дељива са 100 или је дељива са 400. Тиме се постиже да је на 400 година тачно 97 преступних и да је трајање једне године 365,2425 дана, што је веома блиску трајању астрономске године. Проверу дељивости вршимо израчунавајући остатак при дељењу и провером да ли је он једнак нули (као у задатку Збир година браће и сестре).

```
godina = int(input())
if (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or godina % 400 == 0:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Проверу можемо издвојити и у засебну функцију, коју онда можемо употребљавати и у наредним програмима.

```
# provera da li je data godina prestupna
def presupna(godina):
    return (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or godina % 400 == 0

godina = int(input())
if prestupna(godina):
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Задатак: Два броја истог знака

Написати програм којим се проверава да ли су два цела броја истог знака.

Улаз: На стандардном улазу налазе се два цела броја a, b ($-10^4 \leq a, b \leq 10^4$), оба различита од нуле.

Излаз: Једна линија стандарног излаза која садржи реч `da` ако су дати бројеви истог знака, иначе садржи реч `ne`.

Пример

Улаз	*Излаз*
`234` `-34`	`ne`

Решење

Бројеви a и b истог су знака ако су оба позитивна ($a > 0$ и $b > 0$) или оба негативна ($a < 0$ и $b < 0$), па задатак можемо решити постављањем тих услова. Подсетимо се да у језику Пајтон везник *и* можемо записати оператором логичке конјункције `and`, а везник *или* можемо записати оператором логичке дисјункције `or`.

```
a = int(input())
b = int(input())
if (a > 0 and b > 0) or (a < 0 and b < 0):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Још елегантније решење је да се услов да су два броја истог знака искаже као $a > 0 \Leftrightarrow b > 0$ тј. да је број a позитиван ако и само ако је број b позитиван (то је оправдано јер бројеви нису једнаки нули). У програмским језицима не постоји посебан оператор еквиваленције, међутим, еквиваленција две логичке вредности се може заправо испитати њиховим поређењем оператором `==`. Једнакост два логичка израза ће бити тачна ако су оба израза тачна или ако су оба израза нетачна, што је управо исто оно што је семантика њихове еквиваленције.

```
a = int(input())
b = int(input())
if (a > 0) == (b > 0):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Један трик да лако испитамо да ли су два броја истог знака је да приметимо то да су бројеви, различити од нуле, истог знака ако и само ако је њихов производ већи од 0. Према томе довољно је проверити да ли је $a \cdot b > 0$. При томе морамо бити обазриви да ли производ бројева не доводи до прекорачења. У нашем задатку до прекорачења неће доћи јер су бројеви a, b из интервала $[-10^4, 10^4]$ па је њихов производ у интервалу $[-10^8, 10^8]$ што може да се региструје коришћењем целобројног типа података (опсеге различитих типова и питање прекорачења разматраћемо детаљније у наредним деловима збирке).

```
a = int(input())
b = int(input())
if a * b > 0:
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Исти квадрант

Написати програм којим се проверава да ли две тачке $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ припадају истом квадранту. Сматраћемо да тачке на позитивном делу x осе припадају првом и четвртом квадранту, тачке на негативном делу x осе припадају другом и трећем квадранту, слично тачке на позитивном делу y осе припадају првом и другом квадранту, а на негативном делу y осе трећем и четвртом квадранту, а да координатни почетак припада свим квадрантима.

Улаз: Стандардни улаз садржи четири цела броја, сваки у посебној линији:

- x_1, y_1 ($-10^4 \leq x_1, y_1, \leq 10^4$) - координате тачке $A(x_1, y_1)$
- x_2, y_2 ($-10^4 \leq x_2, y_2, \leq 10^4$) - координате тачке $B(x_2, y_2)$

Излаз: На стандардном излазу у једној линији приказати реч `da` ако тачке припадају истом квадранту у супрорном приказати реч `ne`.

Пример

Улаз	*Излаз*

`12`
`-45`
`15`
`23`
	`ne`

Задатак: Тачка у правоугаонику и кругу

Напиши програм који за тачку у равни задату својим координатама испитује да ли припада задатом кругу и задатом правоугаонику чије су странице паралелне са координатним осама.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се следећи реални бројеви (бројеви у истом реду су раздвојени једним размаком):

- x, y - координате тачке,
- x_0, y_0 - координате заједничког центра круга и правоугаоника,
- r - полупречник круга,
- w, h - дужина и ширина страница правоугаоника.

Излаз: На стандардни излаз исписати два линије текста. У првој линији треба да пише `jeste u krugu` ако тачка (x, y) припада кругу са центром (x_0, y_0) полупречника r односно `nije u krugu` ако тачка не припада кругу. У другој линији треба да пише `jeste u pravougaoniku` ако тачка (x, y) припада правоугаонику чији је центар (тежиште) у тачки (x_0, y_0), чије су странице паралелне координатним осама и чија је дужина w тј. h, односно `nije u pravougaoniku` ако тачка не припада унутрашњости тог правоугаоника. Граница круга (кружница) и правоугаоника сматрају се њиховим делом.

Пример

Улаз	*Излаз*

`1 1`
`0 0`
`1`
`2 2`
	`nije u krugu`
	`jeste u pravougaoniku`

Задатак: Статус објављен током школе

Милица је објавила три статуса на друштвеној мрежи. Напиши програм који проверава да ли је неки од тих статуса написан у школи (Милица је била у школи од 8:30 до 13:50, укључујући и та времена).

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се три времена објаве статуса (свако време у посебном реду). За сваки статус се учитавају сати и минути (два цела броја раздвојена размаком).

Излаз: На стандардни излаз написати `da` ако је неки статус објављен током боравка у школи тј. `ne` у супротном.

Пример 1

Улаз	*Излаз*

`14 23`
`17 19`
`22 14`
	`ne`

Пример 2

Улаз	*Излаз*

`7 23`
`8 45`
`15 20`
	`da`

Задатак: Да ли се две даме нападају

Напиши програм који проверава да ли се две даме (краљице) на шаховској табли међусобно нападају (краљице се нападају ако се налазе у истој врсти, истој колони или на истој дијагонали шаховске табле).

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају координате поља на којем се налази једна краљица (два броја између 0 и 7 раздвојена размаком) и у наредном реду координате поља на којем се налази друга краљица (поново два броја између 0 и 7 раздвојена размаком). Претпостављамо да се краљице налазе на различитим пољима.

Излаз: На стандардни излаз исписати текст `da` ако се краљице нападају тј. `ne` у супротном.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`5 3` `1 7`	`da`	`5 3` `1 8`	`ne`	`4 4` `4 6`	`da`

3.3 Угнежђено гранање

У задацима који следе користи се угнежђено гранање (наредбе гранања су наведене унутар тела ширих наредби гранања).

3.3.1 Елементи програмског језика

Уколико је потребно извршити гранање на основу неколико међусобно искључујућих услова, то можемо да урадимо коришћењем *кључне речи* `elif`, која се у општем случају користи овако:

```
if uslov1:
   naredba1
elif uslov2:
   naredba2
elif uslov3:
   naredba3
...
else
   naredbak
```

Приликом извршавања ове наредбе проверавају се редом услови `uslov1`, `uslov2` итд. све док се не наиђе на неки услов који је испуњен и чији се блок наредби извршава. Последња `else` ставка се извршава ако ниједан од услова није испуњен. Тај део је опцион и не мора се навести.

Поменимо једну важну појаву познату као *виseће else* (енг. dangling else). Уколико имамо угнежђено гранање облика:

```
if uslov1:
   if uslov2:
      naredba1
else:
   naredba2
```

лако се може погрешити у форматирању и добити нетачан резултат. Када желимо да се `else` ставка веже за прву `if` наредбу, писаћемо као што је горе наведено. Међутим, када нам је потребно да се `else` ставка веже за другу `if` наредбу, треба писати:

```
if uslov1:
   if uslov2:
      naredba1
   else
      naredba2
```

3.3.2 Гранање на основу припадности интервалима

У наредним задацима потребно је донети одређену одлуку на основу тога којем од неколико надовезаних интервала бројевне праве припада унета вредност. На пример, агрегатно стање воде одређујемо у зависности од тога да ли температура припада интервалу $[-\infty, 0)$, $[0, 100]$ или $(100, +\infty)$, а успех ученика у зависности од тога да ли просек припада интервалу $[2.0, 2.5)$, $[2.5, 3.5)$, $[3.5, 4.5)$ или $[4.5, 5]$.

Иако је могуће направити серију независних гранања којима се за сваки интервал проверава да ли му вредност припада, ови задаци се најчешће решавају помоћу надовезаних гранања применом кључне речи `elif` (тиме

се смањује број поређења и могућност грешке).

Задатак: Агрегатно стање

Написати програм којим се на основу температуре воде одређује њено агрегатно стање. Ако је температура:

- виша од $0°\ C$ и нижа од $100°\ C$ - агрегатно стање је течно
- не виша од $0°\ C$ - агрегатно стање је чврсто,
- не нижа од $100°\ C$ - агрегатно стање је гасовито.

За температуру од тачно $0°$ сматра се да је агрегатно стање чврсто, а за тачно $100°$ да је гасовито.

Улаз: Температура - цео број од -100 до 200.

Излаз: На стандардни излаз исписати једну од следећих речи: `cvrsto`, `tecno`, `gasovito`.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`-10`	`cvrsto`	`99`	`tecno`

Решење

Из формулације задатка произилази да имамо три агрегатна стања, која настају у следећим температурним интервалима:

- ако температура није виша од $0°\ C$ - агрегатно стање је чврсто;
- ако је температура виша од $0°\ C$ и нижа од $100°\ C$ - агрегатно стање је течно;
- ако температура није нижа од $100°\ C$ - агрегатно стање је гасовито.

Одавде произилази кôд са три међусобно независна услова, којима се у произвољном редоследу проверава припадност температуре једном од три интервала $(-\infty, 0]$, $(0, 100)$ и $[100, \infty)$.

```
t = int(input()) # temperatura
if t <= 0:
    print("cvrsto")
if t > 0 and t < 100:
    print("tecno")
if t >= 100:
    print("gasovito")
```

Међутим, до решења се може доћи и уз коришћење такозване *конструкције* `elif`, следећим поступком:

- ако температура "није виша" од $0°\ C$ - агрегатно стање је чврсто;
- у противном (температура је виша од $0°\ C$): ако је температура нижа од $100°\ C$ (припада другом интервалу) - агрегатно стање је течно;
- у противном (температура је виша или једнака $100°\ C$): агрегатно стање је гасовито.

```
t = int(input()) # temperatura
if t <= 0:
    print("cvrsto")
elif t < 100:
    print("tecno")
else:
    print("gasovito")
```

Аналогно, претходном решењу можемо проверавати припадност температуре интервалу, али идући сдесна од интервала $[100, \infty)$.

```
t = int(input()) # temperatura
if t >= 100:
    print("gasovito")
elif t > 0:
    print("tecno")
else:
    print("cvrsto")
```

Задатак: Успех ученика

Написати програм којим се на основу датог просека ученика приказује успех ученика. Одличан успех има ученик чији је просек већи или једнак 4,5. Врлодобар успех постиже ученик чији је просек већи или једнак 3,5, а мањи од 4,5, добар успех се постиже за просек који је већи или једнак 2,5 а мањи од 3,5, довољан успех за просек већи или једнак 2, а мањи од 2,5. Ако ученик има неку јединицу унеће се просек 1, а успех му је недовољан.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се један реалан број из скупа $[2, 5] \cup \{1\}$ који представља просек ученика.

Излаз: На стандардни излаз приказати успех ученика (реч `odlican`, `vrlodobar`, `dobar`, `dovoljan` или `nedovoljan`).

Пример

Улаз	*Излаз*
`3.75`	`vrlodobar`

Решење

Гранање на основу припадности интервалима

Одређивање успеха врши се на основу припадности датог просека интервалима тако да се овај задатак може решити на сличан начин као и задатак Агрегатно стање.

Један начин за решавање задатка је да за сваки успех, независно један од другог, проверимо да ли просек припада одговарајућем интервалу. Проверу да ли ученик има одличан успех вршимо утврђујући да ли је просек већи или једнак 4,5, за врло добар успех проверавамо да ли је просек већи или једнак 3,5 а мањи од 4,5, и слично за остале успехе.

```
prosek = float(input())  # prosek ocena ucenika
if prosek >= 4.5:
    print("odlican")
if prosek >= 3.5 and prosek < 4.5:
    print("vrlodobar")
if prosek >= 2.5 and prosek < 3.5:
    print("dobar")
if prosek >= 2 and prosek < 2.5:
    print("dovoljan")
if prosek == 1:
    print("nedovoljan")
```

Можемо приметити неке недостатке таквог решења:

- када утврдимо да ученик има један успех, нема потребе да проверавамо да ли ученик постиже неки други успех;
- када утврдимо да ученик не постиже успех који смо проверавали онда то можемо искористити за проверу следећег успеха.

Наведене недостатке превазилазимо тако што провере не вршимо независно једну од друге. Проверавамо редом успехе од одличног до недовољног (можемо и од недовољног до одличног) и при томе у следећој провери увек користимо оно шта смо закључили у претходној, коришћењем конструкције `else-if`. Прво проверимо да ли је ученик постигао одличан успех тј. да ли му је просек већи или једнак 4,5, ако јесте прикажемо одговарајућу поруку, а ако није настављамо даљу проверу. Сада знамо да је просек ученика мањи од 4,5 па при провери да ли је ученик постигао врло добар успех тај услов не проверавамо већ само да ли је просек већи или једнак 3,5. На исти начин настављамо по потреби провере за добар и довољан успех, и на крају ако ниједан услов није испуњен ученик има недовољан успех.

```
prosek = float(input())  # prosek ocena ucenika
if prosek >= 4.5:
    print("odlican")
elif prosek >= 3.5:
    print("vrlodobar")
elif prosek >= 2.5:
    print("dobar")
elif prosek >= 2:
```

```
    print("dovoljan")
else:
    print("nedovoljan")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Одмор на пола пута

Путник се кретао T_1 сати брзином V_1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, а затим T_2 сати брзином V_2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ и T_3 сати брзином V_3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Планирао је да се одмори на пола пута, израчунати после колико времена од почетка путовања је имао одмор.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 реалних бројева, сваки у засебном реду: T_1, V_1, T_2, V_2, T_3, V_3.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља време потребно да путник стигне до пола пута. Допуштена грешка у израчунавању и приказу резултата је 10^{-3}.

Пример

Улаз	*Излаз*
1 10 2 20 3 30	3.667

Решење

Пошто се на свакој деоници путник кретао равномерно, пређени пут на свакој деоници може се израчунати на основу формула $s_1 = v_1 \cdot t_1$, $s_2 = v_2 \cdot t_2$, $s_3 = v_3 \cdot t_3$ (види задатак Путовање). Зато је половина пређеног пута на растојању $s_{pola} = (s_1 + s_2 + s_3)/2$. Да бисмо израчунали после колико времена је дошао до те половине, анализираћемо да ли та средина пута лежи на првој, другој или трећој деоници. Ако је на првој (ако је $s_{pola} \leq s_1$), тада се време може израчунати као s_{pola}/v_1. Ако је на другој (ако је $s_1 < s_{pola} \leq s_1 + s_2$), тада се време може израчунати као $t_1 + (s_{pola} - s_1)/v_2$ (прву деоницу је прешао за време t_1, а онда је у другој прешао пут $s_{pola} - s_1$ крећући се брзином v_2). На крају, ако је на трећој (ако је $s_1 + s_2 < s_{pola} \leq s_1 + s_2 + s_3$), тада се време може израчунати као $t_1 + t_2 + (s_{pola} - (s_1 + s_2))/v_3$ (прву и другу деоницу је прешао за време $t_1 + t_2$, а онда је у трећој деоници прешао пут $s_{pola} - (s_1 + s_2)$ крећући се брзином v_3). Одређивање на којој деоници је средина пута врши се одређивањем интервала ком израчуната вредност припада, што се може урадити конструкцијом `else-if` како је приказано у задатку Агрегатно стање.

```
# ucitavamo vreme i brzinu na svakoj deonici puta
t1 = float(input()); v1 = float(input())
t2 = float(input()); v2 = float(input())
t3 = float(input()); v3 = float(input())
# izracunavamo duzinu svake deonice
s1 = t1 * v1
s2 = t2 * v2
s3 = t3 * v3
# izracunavamo rastojanje do polovine puta
sPola = (s1 + s2 + s3) / 2.0
# izracunavamo i ispisujemo vreme za koje se stiglo do pola puta
if sPola <= s1:
    tDoPola = sPola / v1
elif sPola <= s1 + s2:
    tDoPola = t1 + (sPola - s1) / v2
else:
    tDoPola = t1 + t2 + (sPola - (s1 + s2)) / v3
print(format(tDoPola, '.3f'))
```

Задатак: Растојање од тачке до дужи

Одредити растојање дате тачке A од дате дужи A_0A_1 која лежи на x-оси (растојање тачке и дужи дефинише се као најкраће међу растојањима између те тачке и тачака те дужи).

Улаз: Са стандардног улаза уносе се 4 реална броја (сваки у посебном реду):

- x_0 ($-10 \leq x_0 < 10$) – x-координата тачке $A_0(x_0, 0)$
- x_1 ($x_0 < x_1 \leq 10$) – x-координата тачке $A_1(x_1, 0)$

- x, y ($-20 \leq x, y, \leq 20$) – координате тачке $A(x, y)$

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број - најкраће растојање од тачке A до дужи A_0A_1, заокружено на пет децимала.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`0`	`1.41421`
`1`	
`-1`	
`1`	

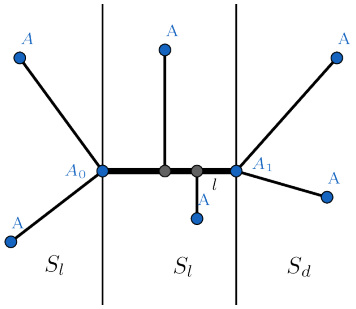
Пример 2

Улаз	*Излаз*
`0`	`3.00000`
`1`	
`0.5`	
`3`	

Решење

Посматрајмо дуж A_0A_1 за тачке $A_0(x_0, 0)$ и $A_1(x_1, 0)$ и поделу равни на три дисјунктна подскупа:

$$S_l = \{(x, y) \mid x < x_0\}, \quad S_s = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_1\}, \quad S_d = \{(x, y) \mid x > x_1\}.$$



Слика 3.1: Растојање од тачке до дужи

Свим тачкама $A \in S_l$ најближа тачка дужи A_0A_1 је тачка A_0. Докажимо ово тако што ћемо претпоставити супротно, тј. претпоставити да је нека тачка $A' \in A_0A_1$ ближа тачки A него тачка A_0. У троуглу AA_0A' страница AA' која лежи наспрам тупог угла $\angle AA_0A'$ већа је од странице AA_0 која лежи наспрам оштрог угла $\angle AA'A_0$, што је контрадикција у односу на нашу претпоставку.

Аналогно, свим тачкама $A \in S_d$ најближа је тачка A_1.

Тачкама $A \in S_s$ најближа је њихова нормална пројекција A_n на дуж A_0A_1. Докажимо то тако што ћемо претпоставити супротно, да постоји нека тачка $A' \in A_0A_1$ која је ближа тачки A него тачка A_n. У троуглу AA_nA' дуж AA' је хипотенуза и лежи наспрам правог угла, па мора бити дужа од катете AA_n која лежи наспрам оштрог угла, што је контрадикција.

Ако тачка A има координате (x, y), тада је њено растојање од тачке A_0 једнако $\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$, а од тачке A_1 једнако је $\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}$ (ово следи на основу Питагорине теореме, како смо то већ показали у задатку Растојање тачака). Пројекција A_n има координате $(x, 0)$ тако да је њено растојање од тачке A једнако $\sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2} = |y|$. Припадност тачке скуповима S_l, S_s или S_d врши се гранањем на основу интервала реалне праве којима припада тачка x, обично помоћу `elif` како смо приказали, на пример, у задатку Агрегатно стање.

```
import math

# rastojanje tacaka (x1, y1) i (x2, y2)
def rastojanje_tacaka(x1, y1, x2, y2):
    return math.sqrt((x2 - x1)**2 + (y2 - y1)**2)

# duz ima koordinate (x0, 0) i (x1, 0)
x0 = float(input()); x1 = float(input())
# koordinate tacke (x, y)
x = float(input()); y = float(input())
# izracunavamo rastojanje tacke od duzi
```

```
if x < x0:       # x < x0
    rastojanje = rastojanje_tacaka(x, y, x0, 0)
elif x <= x1:    # x0 <= x <= x1
    rastojanje = abs(y)  # rastojanje_tacaka(x, y, x, 0)
else:            # x > x1
    rastojanje = rastojanje_tacaka(x, y, x1, 0)
# ispisujemo rezultat
print(format(rastojanje, '.5f'))
```

Примена симетрија

Анализа би била једноставнија ако бисмо заједно померили (транслирали) тачку A и дуж A_0A_1 (не мењајући њихов међусобни положај), тако да се дуж нађе на x оси са средиштем у координатном почетку, а тачка A у првом квадранту или на његовој граници. Ово можемо да постинемо у неколико корака.

- Најпре дуж A_0A_1 и тачку A померамо за вектор $(-x_0 - \frac{d_x}{2}, 0)$, где је $d_x = x_1 - x_0$ дужина дужи A_0A_1. Ово чинимо тако што на координате крајњих тачака дужи A_0A_1 и тачке A додамо координате поменутог вектора. Тиме смо средиште дужи довели у координатни почетак.
- Ако је x координата тачке A након транслације негативна, можемо да пресликамо тачку A симетрично у односу на y осу. То постижемо тако што x координату тачке A заменимо њеном апсолутном вредношћу. Тиме се растојање тачке A од дужи A_0A_1 неће променити, а x координата ће бити већа или једнака нули.
- На крају, ако је y координата тачке A негативна, можемо да пресликамо тачку A симетрично у односу на x осу, тј. y координату тачке A заменимо њеном апсолутном вредношћу (растојање тачке и дужи ће и даље бити исто).

После описаних померања тачке и дужи, дате тачке имају нове координате: $A'_0 = (x'_0, y'_0) = (-\frac{d_x}{2}, 0)$, $A'_1 = (x'_1, y'_1) = (\frac{dx}{2}, 0)$ и $A' = (x', y') = (|x - x0 - \frac{dx}{2}|, |y|)$. Сада је анализа случајева једноставнија. Ако је $x' \leq x'_1$, тада је најближа тачка тачки A' њена нормална пројекција на дуж $A'_0A'_1$ и растојање је једнако y', а ако је $x' > x'_1$ тада је најближа тачка тачка A'_1 и растојање се може израчунати као растојање између тачака A' и A'_1.

```
import math

# rastojanje tacaka (x1, y1) i (x2, y2)
def rastojanje_tacaka(x1, y1, x2, y2):
    return math.sqrt((x2 - x1)**2 + (y2 - y1)**2)

# duz ima koordinate (x0, 0) i (x1, 0)
x0 = float(input()); x1 = float(input())
# koordinate tacke (x, y)
x = float(input()); y = float(input())

# simetricno preslikavamo konfiguraciju tako da je srediste duzi u
# koordinatnom pocetku, a tacka u prvom kvadrantu
dx = x1 - x0
# koordinate u transformisanom koordinatnom sistemu
x0t = -dx / 2
x1t = dx / 2
xt = abs(x - x0 + (-dx / 2))
yt = abs(y)

# izracunavamo rastojanje
if xt <= x1t:
    rastojanje = yt
else:
    rastojanje = rastojanje_tacaka(xt, yt, x1t, 0)

# ispisujemo rezultat
print(format(rastojanje, '.5f'))
```

Задатак: Школарина

У једној приватној школи уведено је правило којим се одређује износ попуста који остварују ученици приликом уписа у наредну школску годину. Ученици са одличним успехом остварују попуст од 40% укупног износа школарине, са врлодобрим 20% а са добрим 10%. Такође, ученици који су освојили награду на неком од државних такмичења остварују попуст од 30% укупног износа школарине. Уколико неки ученик испуњава два критеријума за попуст примењује се критеријум по коме је попуст већи. На основу пуног износа школарине, просечне оцене ученика и информације о наградама са такмичења одредити износ који ученик треба да плати при упису у наредну школску годину.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се пун износ школарине (реалан број), у другој просечна оцена ученика (реалан број од 2.0 до 5.0) а у трећој 0 уколико ученик нема награду или 1 уколико је има.

Излаз: Износ школарине коју ученик треба да плати (заокружен на најближи цео број) наводи се у једној линије стандардног излаза.

Пример

Улаз	*Излаз*
4000	2400
4.65	
1	

Задатак: Солидарни порез

Порез је одређен на следећи начин. Првих $60\,000$ динара бруто плате се не опорезује. На део бруто плате између $60\,000$ и $100\,000$ динара, плаћа се 20% пореза док се на део бруто плате преко $100\,000$ динара плаћа порез од 25%. Напиши програм који за унету бруто плату (плату пре одбијања пореза) израчунава нето плату (плату после одбијања пореза).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава један реалан број – износ бруто плате.

Излаз: На стандардни излаз исписује се један реалан број – износ нето плате, заокружен на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
100000	92000.00

Задатак: Правоугаони прстен

У програму за рад са графиком потребно је имплементирати интеракцију мишем са правоугаоницима нацртаним на екрану, чије су ивице паралелне координатним осама. Правоугаоник се мишем превлачи по екрану тако што се ухвати за ивицу, а да би се то лакше радило допуштена је толеранција од по 5 пиксела са сваке стране ивица правоугаоника. Када је миш близу ивице правоугаоника, ивица се исцртава другом бојом. Такође, када је миш унутар правоугаоника (а када миш није близу ивице) цео правоугаоник се боји неком трећом бојом. Напиши програм који за дату позицију миша и дати правоугаоник одређује да ли је миш близу ивице (рачунајући дату толеранцију), или је унутар правоугаоника, довољно далеко од ивице или је ван правоугаоника, довољно далеко од ивице.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се 6 целих бројева, сваки у посбној линији.

- x, y - координате миша
- x_0, y_0 - координате горњег левог темена правоугаоника
- w, h - ширина и висина правоугаоника.

Напомена: координата y у рачунарској графици расте одозго наниже.

Излаз: На стандардни излаз исписати `UNUTRA` ако се миш налази унутар (проширених) ивица правоугаоника, `SPOLJA` ако је миш ван (проширених) ивица правоугаоника, тј. `NA IVICI` ако се налази на (проширеној) ивици правоугаоника.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
101	NA IVICI
101	
100	
100	
100	
100	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
106	UNUTRA
106	
100	
100	
50	
100	

Пример 3

Улаз	*Излаз*
94	SPOLJA
94	
100	
100	
50	
100	

Задатак: Оцена на испиту

Оцена на испиту одређује се на основу броја освојених поена (може се освојити између 0 и 100 поена). Сви студенти који су добили мање од 51 поен аутоматски падају испит и добијају оцену 5. Оцена 6 се добија за број поена већи или једнак од 51, а мањи од 61, оцена 7 за број поена већи или једнак од 61, а мањи од 71, оцена 8 за број поена већи или једнак од 71, а мањи од 81, оцена 9 за број поена већи или једнак од 81 а мањи од 91, а оцена 10 за број поена већи или једнак од 91.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се један цео број између 0 и 100 који представља број поена освојених на испиту.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - оцену на испиту.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
73	8

Пример 2

Улаз	*Излаз*
50	5

Пример 3

Улаз	*Излаз*
51	6

Пример 4

Улаз	*Излаз*
100	10

3.3.3 Гранање на основу коначног скупа вредности

У наредним задацима одлуку доносимо на основу испитивања неколико могућих вредности дате промењиве (на пример, редни број месеца на основу назива одређујемо провером 12 могућности).

Задатак: Редни број месеца

Напиши програм који на основу назива месеца одређује његов редни број.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси назив месеца записан малим словима латинице.

Излаз: На стандардни излаз исписати један природан број који представља редни број месеца.

Пример

Улаз	*Излаз*
mart	3

Решење

Потребно је извршити класификацију на основу једне од 12 могућих вредности. Међутим, пошто је потребно унети назив месеца и класификацију извршити на основу тог текста, неопходно је употребити ниску карактера.

Једно могуће решење је решење помоћу гранања наредбама `if` тј. конструкцијом `else-if`.

```
mesec = input()  #  ucitavamo mesec

if mesec == "januar":
    print(1)
elif mesec == "februar":
    print(2)
elif mesec == "mart":
    print(3)
    # ...
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Број дана у месецу

Напиши програм који за дати редни број месеца и годину одређује број дана у том месецу. Водити рачуна о томе да ли је година преступна (година је преступна ако је дељива са 4, а није дељива са 100, осим ако је дељива са 400, када јесте преступна).

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се два броја:

- број месеца m ($1 \leq m \leq 12$) и
- број године g ($1900 \leq g \leq 2100$)

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља број дана у задатом месецу.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
11 2014	30

Пример 2

Улаз	*Излаз*
2 2014	28

Пример 3

Улаз	*Излаз*
2 2016	29

Пример 4

Улаз	*Излаз*
2 2000	29

Пример 5

Улаз	*Излаз*
2 2100	28

Пример 6

Улаз	*Излаз*
4 2019	30

Пример 7

Улаз	*Излаз*
8 2018	31

Решење

Гранање је могуће остварити помоћу узастопних наредби `if` или још ефикасније помоћу конструкције `else-if` (слично као што се вршило гранање на основу припадности интервалима у задатку Агрегатно стање). Све месеце са истим бројем дана можемо груписати у исту грану.

```
# provera da li je data godina prestupna
def prestupna(godina):
    return (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or (godina % 400) == 0

# ucitavamo mesec i godinu
mesec = int(input()); godina = int(input())

# odredjujemo broj dana u tom mesecu
broj_dana = 0
if mesec == 1 or mesec == 3 or mesec == 5 or mesec == 7 or\
   mesec == 8 or mesec == 10 or mesec == 12:
    # januar, mart, maj, jul, avgust, oktobar, decembar
    broj_dana = 31
elif mesec == 4 or mesec == 6 or mesec == 9 or mesec == 11:
    # april, jun, septembar, novembar
    broj_dana = 30
else:
    # februar
    broj_dana = 29 if prestupna(godina) else 28

# ispisujemo rezultat
print(broj_dana)
```

Проверу да ли неки месец припада скупу месеци са датим бројем дана можемо остварити и експлицитним коришћењем скупова.

```
# provera da li je data godina prestupna
def prestupna(godina):
    return (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or godina % 400 == 0

# ucitavamo mesec i godinu
mesec = int(input()); godina = int(input())

# odredjujemo broj dana u tom mesecu
if mesec in {1, 3, 5, 7, 8, 10, 12}:
```

```
    # januar, mart, maj, jul, avgust, oktobar, decembar
    broj_dana = 31
elif mesec in {4, 6, 9, 11}:
    # april, jun, septembar, novembar
    broj_dana = 30
else:
    # februar
    if prestupna(godina):
        broj_dana = 29
    else:
        broj_dana = 28

# ispisujemo rezultat
print(broj_dana)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Назив месеца

Напиши програм који на основу унетог редног броја месеца исписује његов назив.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси редни број месеца - природан број између 1 и 12.

Излаз: На стандардни излаз исписати назив месеца (исписан латиничким ASCII карактерима).

Пример

Улаз	*Излаз*
1	januar

3.3.4 Лексикографско поређење торки

Ако је потребно упоредити два временска тренутка, прво се пореде сати, а тек ако су сати једнаки, онда се пореде минути. Овакав начин поређења се у пракси често среће. Рећи ћемо да се уређене n-торке пореде *лексикографски*, ако се поредак одређује тако што се редом, пореди једна по једна позиција. Илуструјмо ово кроз неколико задатака.

Задатак: Пунолетство

Написати програм којим се испитује да ли ће особа чији је датум рођења познат бити пунолетна (имати пуних 18 година) неког задатог датума.

Улаз: У прве три линије се уноси датум рођења у редоследу дан, месец и година рођења. У следеће три задати датум у редоследу дан, месец и година. Оба датума су исправна.

Излаз: Исписати на стандардном излазу: `DA` - ако ће особа бити пунолетна, и `NE` - ако особа неће бити пунолетна. Ако је један задати датум тачно 18 година након датума рођења, особа се сматра пунолетном (без обзира на тачно време рођења).

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1	DA
5	
1986	
1	
5	
2004	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
1	NE
5	
1986	
30	
4	
2004	

Решење

У задатку се захтева поређење два датума - датума који је тачно 18 година након године рођења и задатог датума у којем се испитује пунолетство. Ако се датуми представе уређеним тројкама облика (g, m, d) тада се поређење датума своди на лексикографско поређење ових уређених тројки. Постоје различити начини да се то уради.

Торке и библиотечко лексикографско поређење

Могуће је искористити библиотечку подршку за рад са n-торкама и њихово поређење које се по правилу врши лексикографски. Ако датуме представимо тројкама бројева у којима је на првом месту година, на другом месец, а на трећем дан, тада лексикографски поредак ових тројки одговара уобичајеном поретку датума. У језику Пајтон торке се лексикографски могу поредити коришћењем релацијских оператора <, >, <=, >=, == и !=.

```
# datum rodjenja
d1 = int(input()); m1 = int(input()); g1 = int(input())
# datum u kom se ispituje punoletstvo
d2 = int(input()); m2 = int(input()); g2 = int(input())
# proveravamo da li je osoba punoletna i ispisujemo rezultat
if (g2, m2, d2) >= (g1 + 18, m1, d1):
   print("DA")
else:
   print("NE")
```

Лексикографско поређење помоћу једног израза

Особа рођена на дан (d_r, m_r, g_r) биће пунолетна (имати пуних 18 година) на дан (d, m, g):

- ако је $g_r + 18 < g$, или;
- ако је $g_r + 18 = g$, али и $m_r < m$, или;
- ако је $g_r + 18 = g$ и $m_r = m$, али и $d_r \leq d$.

Дакле, на основу овога могуће је формирати сложени логички израз који одређује да ли је особа пунолетна.

```
# datum rodjenja
d1 = int(input()); m1 = int(input()); g1 = int(input())
# datum u kom se ispituje punoletstvo
d2 = int(input()); m2 = int(input()); g2 = int(input())
if (g2 > g1 + 18) or \
   (g2 == g1 + 18 and m2 > m1) or \
   (g2 == g1 + 18 and m2 == m1 and d2 >= d1):
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Лексикографско поређење помоћу угнежђеног гранања

Постоји могућност да се поређење тројки реализује угнежђеним (хијерархијским) гранањем којим може да се утврди да ли је прва тројка лексикографски испред друге, да ли је иза ње или да ли су тројке једнаке. Такво лексикографско поређење почиње поређењем прве компоненте (у овом случају године). Ако је година у првом датуму мања од године у другом датуму онда је први датум пре другог, ако је година у првом датуму већа од године у другом датуму онда је први датум после другог, а ако су године једнаке, наставља се поређење наредних компоненти (месеци, евентуално и дана) по истом принципу. Приликом поређења могуће је постављати вредност променљиве која чува резултат поређења.

```
# datum rodjenja
d1 = int(input()); m1 = int(input()); g1 = int(input())
# datum u kom se ispituje punoletstvo
d2 = int(input()); m2 = int(input()); g2 = int(input())

# poredimo godine
if g2 > g1 + 18:
    punoletan = True
elif g2 < g1 + 18:
    punoletan = False
else:
    # godine su jednake, pa poredimo mesece
    if m2 > m1:
        punoletan = True
    elif m2 < m1:
        punoletan = False
```

```
    else:
        # i meseci su jednaki, pa poredimo dane
        if d2 >= d1:
            punoletan = True
        else:
            punoletan = False
        # umesto if, moze i krace:
        # punoletan = d2 >= d1;

if punoletan:
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Имплементација функције лексикографског поређења

Лексикографско поређење је могуће издвојити у посебну функцију. Ако се проверава само да ли је једна тројка лексикографски мања (или, слично, мања или једнака, већа, или већа или једнака) тада се резултат представља логичком вредношћу. Међутим, могуће је поређење организовати тако да је резултат целобројна вредност и то негативан ако је прва тројка лексикографски испред друге, нула ако су тројке једнаке, односно позитиван ако је прва тројка лексикографски иза друге. Оваква дефиниција је погодна јер се овакав резултат може добити простим одузимањем одговарајућих вредности.

```
# poredi datume i vraca:
#  - negativan rezultat ako je prvi datum pre drugog,
#  - nulu ako su datumi jednaki
#  - pozitivan rezultat ako je prvi datum posle drugog
def porediDatume(d1, m1, g1, d2, m2, g2):
    if g1 != g2:
        return g1 - g2
    if m1 != m2:
        return m1 - m2
    return d1 - d2

# datum rodjenja
d1 = int(input()); m1 = int(input()); g1 = int(input())
# datum u kom se ispituje punoletstvo
d2 = int(input()); m2 = int(input()); g2 = int(input())
# proveravamo da li je osoba punoletna i ispisujemo rezultat
if porediDatume(d2, m2, g2, d1, m1, g1 + 18) >= 0:
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Задатак: Бољи у две дисциплине

Такмичари су радили тестове из математике и програмирања. За сваки предмет добили су одређени број поена (цео број од 0 до 50). Такмичари се рангирају по укупном броју поена из оба предмета. Ако два такмичара имају исти број поена, победник је онај који има више поена из програмирања. Потребно је написати програм који одређује победника такмичења.

Улаз: Учитавају се подаци за два такмичара. За сваког такмичара учитава се број поена из математике, а затим број поена из програмирања, сваки у посебном реду.

Излаз: Потребно је исписати редни број победника (1 или 2). Ако су два такмичара остварила потпуно исти успех, победник је такмичар 1 (јер је остварио више поена на квалификационом такмичењу).

Пример 1

Улаз	*Излаз*
37 45 22 47	1

Објашњење

Први такмичар укупно има 37+45=82, а други 22+47=69 поена, тако да је победник први такмичар.

Пример 2

Улаз

```
43
40
40
43
```

Излаз

```
2
```

Објашњење

Први такмичар укупно има 43+40=83, а други 40+43=83 поена. Такмичари имају исти укупан број поена, али други такмичар има више поена из програмирања тако да је он победник.

Решење

Поређење се може реализовати помоћу библиотечке подршке за торке и њихово лексикографско поређење (које је описано у задатку Пунолетство).

```
# provera da li je takmicar A bolji od takmicara B
def bolji(matA, progA, matB, progB):
    ukupnoA = matA + progA
    ukupnoB = matB + progB
    return (ukupnoA, progA) > (ukupnoB, progB)

# broj poena prvog takmicara iz matematike i programiranja
mat1 = int(input()); prog1 = int(input())
# broj poena drugog takmicara iz matematike i programiranja
mat2 = int(input()); prog2 = int(input())

# drugi je pobednik ako i samo ako je bolji od prvog
if bolji(mat2, prog2, mat1, prog1):
    pobednik = 2
else:
    pobednik = 1
print(pobednik)
```

Сваки такмичар је представљен уређеним паром бројева (поенима из математике и програмирања) и потребно је одредти већи од два уређена пара, при чему је релација поретка међу тим паровима одређена условима задатка (пореди се прво укупан број поена, па онда поени из програмирања). Ово је класичан пример релације лексикографског поређења.

Вежбе ради, ту релацију можемо имплементирати и сами, у засебној функцији која прихвата податке за два такмичара (четири броја) и враћа истинитосну (буловску) вредност `True` акко је први бољи од другог у овој релацији. Различити могући начини имплементације лексикографског поређења описани су у задатку Пунолетство.

Један начин је да поређење реализујемо у функцији која проверава један по један услов и ако открије да је на основу неког услова могуће вратити резултат, помоћу `return` тај резултат враћа.

```
# provera da li je takmicar A bolji od takmicara B
def bolji(matA, progA, matB, progB):
    ukupnoA = matA + progA
```

```
    ukupnoB = matB + progB
    if ukupnoA > ukupnoB:
        return True
    if ukupnoA < ukupnoB:
        return False
    return progA > progB

# broj poena prvog takmicara iz matematike i programiranja
mat1 = int(input())
prog1 = int(input())
# broj poena drugog takmicara iz matematike i programiranja
mat2 = int(input())
prog2 = int(input())

# drugi je pobednik ako i samo ako je bolji od prvog
if bolji(mat2, prog2, mat1, prog1):
    pobednik = 2
else:
    pobednik = 1
print(pobednik)
```

Поређење се може реализовати и помоћу сложеног логичког израза.

```
# provera da li je takmicar A bolji od takmicara B
def bolji(matA, progA, matB, progB):
    ukupnoA = matA + progA
    ukupnoB = matB + progB
    return (ukupnoA > ukupnoB) || \
           (ukupnoA == ukupnoB && progA > progB)

# broj poena prvog takmicara iz matematike i programiranja
mat1 = int(input()); prog1 = int(input())
# broj poena drugog takmicara iz matematike i programiranja
mat2 = int(input()); prog2 = int(input())

# drugi je pobednik ako i samo ako je bolji od prvog
if bolji(mat2, prog2, mat1, prog1):
    pobednik = 2
else:
    pobednik = 1
print(pobednik)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Ко је пре стигао

Два другара, Пера и Мика, су дошла у школу. Ако се за сваког зна сат, минут и секунд када је стигао, напиши програм који одређује који од њих је стигао пре.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 целих бројева. Прво сат, минут и секунд када је стигао Пера, а затим сат, минут и секунд када је стигао Мика (претпоставља се да бројеви представљају исправно задата времена).

Излаз: На стандардни излаз исписати једну линију текста: `Pera` ако је пре стигао Пера, `Mika` ако је пре стигао Мика или `istovremeno` ако су стигли истовремено.

Пример

Улаз	*Излаз*
14 23 17 15 23 11	Pera

3.3.5 Хијерархија услова

Задаци који следе карактеристични су по томе што је угнежђено гранање организовано *хијерархијски* (некада се каже у облику *дрвета одлучивања*). У зависности од одговора на свако постављено питање, одређују се даља питања која ће се постављати, све док нас прикупљени одговори не доведу до једнозначног коначног решења.

Задатак: Два броја истог знака

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

До решења се могло доћи и угнежђеним (хијерархијским) гранањем, без коришћења логичких оператора, међутим, такво решење даје веома гломазан програмски кôд и треба га избегавати.

```
a = int(input())
b = int(input())

if a > 0:
    if b > 0:
        istogZnaka = True
    else: # b < 0
        istogZnaka = False
else: # a < 0
    if b > 0:
        istogZnaka = False
    else: # b < 0
        istogZnaka = True
if istogZnaka:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Задатак: Линеарна једначина

Напиши програм који одређује број решења линеарне једначине $a \cdot x + b = 0$ за реалне вредности коефицијената a и b и решава је ако постоји јединствено решење.

Улаз: У првом реду коефицијент a, у другом коефицијент b.

Излаз: Ако има једно решење испис решења на две децимале, ако нема решења порука: `NEMA RESENJA`, ако има бесконачно много решења порука: `BESKONACNO RESENJA`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1 1	-1.00

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0 0	BESKONACNO RESENJA

Пример 3

Улаз	*Излаз*
0 1	NEMA RESENJA

Решење

Број решења линеарне једначине облика $a \cdot x + b = 0$ зависи од тога да ли су коефицијенти једнаки или различити од нуле. Ако је

- $a \neq 0$, једначина има јединствено решење $x = -\frac{b}{a}$,
- $a = 0$ једначина се своди на једначину $0 \cdot x + b = 0$, која када је $b \neq 0$ нема решења. Ако је $b = 0$ једначина гласи $0 \cdot x + 0 = 0$, па је сваки реалан број њено решење.

Након учитавања бројева могуће је извршити гранање и исписати тражени резултат.

```
# koeficijenti jednacine
a = float(input()); b = float(input())
if a != 0.0:
    # a != 0: jednacina ima jedinstveno resenje
    x = - b / a
    print(format(x, '.2f'))
else:
    # jednacina je oblika 0*x + b = 0:
    #   - ima beskonacno mnogo resenja ako je b = 0,
    #   - nema resenja ako je b != 0
    if b == 0.0:
        print("BESKONACNO RESENJA")
    else:
        print("NEMA RESENJA")
```

Задатак: Икс-окс

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Пошто је у овом задатку број случајева релативно мали, можемо га решити и анализом случајева тј. гранањем.

Угнежђено гранање

Можемо засебно одредити ком интервалу припада координата x (гранањем на основу припадности надовезаним интервалима, као, на пример у задатку Успех ученика), а затим у свакој грани одредити ком интервалу припада координата y.

```
# koordinate piksela
x = int(input()); y = int(input())

# spoljasnjim grananjem po y odredjujemo kolonu, a zatim unutrasnjim
# grananjem po x odredjujemo vrstu u kojoj se piksel nalazi
if y <= 100:
    if x <= 100:
        kvadrat = 1
    elif x <= 200:
        kvadrat = 2
    else:
        kvadrat = 3
elif y <= 200:
    if x <= 100:
        kvadrat = 4
    elif x <= 200:
        kvadrat = 5
    else:
        kvadrat = 6
else:
    if x <= 100:
        kvadrat = 7
    elif x <= 200:
        kvadrat = 8
```

```
    else:
        kvadrat = 9

print(kvadrat)
```

Засебна анализа свих могућих случајева

Пошто је могућих случајева (квадрата) само 9, могуће је и извршити исцрпну проверу свих могућих случајева. На пример, тачка припада квадрату број 1 ако важи $1 \leq x \leq 100$ и $1 \leq y \leq 100$.

```
# koordinate piksela
x = int(input()); y = int(input())

# analiziramo sve slucajeve
if 1 <= x and x <= 100 and 1 <= y and y <= 100:
    kvadrat = 1
if 101 <= x and x <= 200 and 1 <= y and y <= 100:
    kvadrat = 2;
if 201 <= x and x <= 300 and 1 <= y and y <= 100:
    kvadrat = 3;
if 1 <= x and x <= 100 and 101 <= y and y <= 200:
    kvadrat = 4;
if 101 <= x and x <= 200 and 101 <= y and y <= 200:
    kvadrat = 5;
if 201 <= x and x <= 300 and 101 <= y and y <= 200:
    kvadrat = 6;
if 1 <= x and x <= 100 and 201 <= y and y <= 300:
    kvadrat = 7;
if 101 <= x and x <= 200 and 201 <= y and y <= 300:
    kvadrat = 8;
if 201 <= x and x <= 300 and 201 <= y and y <= 300:
    kvadrat = 9;

# ispisujemo resenje
print(kvadrat)
```

Задатак: Квадранти и осе

Дате су координате тачке. Напиши програм који одређује у ком квадранту или на којој оси се она налази.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се два цела броја (сваки у посебном реду): x-координата и y-координата тачке ($-10 \leq x, y \leq 10$).

Излаз: На стандардни излаз исписати да ли се тачка налази у неком од четири квадранта, да ли је на неком делу неке координатне осе или је координатни почетак.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`-1` `2`	`2. kvadrant`

Пример 2

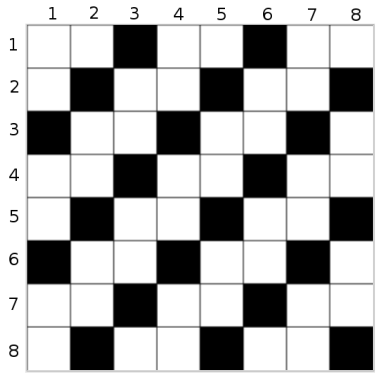
Улаз	*Излаз*
`0` `3`	`pozitivni deo y ose`

Пример 3

Улаз	*Излаз*
`0` `0`	`koordinatni pocetak`

Задатак: Размакнуте дијагонале

На једној необичној шаховској табли црна поља су распоређена по споредним дијагоналама тако да су у првој врсти прва два поља бела, затим иде једно црно поље, затим два бела, па црно и тако у круг. Једна таква табла је приказана на слици. Напиши програм који одређује боју поља на основу унетих координата.



Слика 3.2: Размакнуте дијагонале

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају редни бројеви врсте и колоне три поља v ($1 \leq v \leq 100$) и k ($1 \leq k \leq 100$), раздвојене једним размаком (за свако поље у посебном реду).

Излаз: На стандардни излаз исписати боју поља (`crno` или `belo`), за свако поље у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
`1 5`	`belo`
`2 4`	`belo`
`3 4`	`crno`

Задатак: Положај две праве

Дате су две праве својим имплицитним једначинама (једначинама облика $Ax + By + C = 0$). Одредити њихов међусобни положај (поклапају се, паралелне су или се секу у тачки…)

Улаз: У 6 линија стандардног улаза налази се у свакој по један реалан број. Прва три броја редом представљају коефицијенте A, B и C једне праве, а друга 3 коефицијенте друге праве.

Излаз: У једној линији стандардног излаза исписује се текст `poklapaju se` за праве које се поклапају, `paralelne su` за паралелне праве или `seku se` за праве које се секу. Ако се праве секу у другој линији стандардног излаза исписују се координате пресечне тачке (2 реална броја са две децимале).

Пример

Улаз	*Излаз*

`5`
`0`
`-10`
`1`
`1`
`0`
	`seku se`
	`2.00 -2.00`

3.3.6 Минимум и максимум два броја

Максимум два броја је већи, а минимум је мањи од њих. Њихово одређивање се може веома једноставно извршити гранањем. На пример, одређивање максимума бројева `a` и `b` може се извршити на следећи начин:

```
if a >= b:
    maks = a
else:
    maks = b
```

Уместо наредбе гранања можемо употребити и условни израз.

```
maks = a if a >= b else b
```

Ипак, програми у којима је потребно одредити минимум или максимум бивају једноставнији ако се уместо гранања употребе библиотечке функције за одређивање минимума и максимума. Подсетимо се, у језику Пајтон то су функције `min` и `max`.

У наставку ћемо видети неколико задатака у којима проналажење минимума и максимума парова бројева доводи до решења.

Задатак: Куглице

У свакој од две кутије налазе се само црвене и плаве куглице. Напиши програм који за дати број црвених и плавих куглица у свакој од кутија одређује најмањи број куглица које је потребно преместити из кутије у кутију да би у једној кутији биле само црвене, а у другој само плаве куглице.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се четири цела броја (сваки у посебном реду): број црвених куглица у првој кутији, број плавих куглица у првој кутији, број црвених куглица у другој кутији и број плавих куглица у другој кутији.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број – укупан број куглица које треба преместити из кутије у кутију.

Пример

Улаз	*Излаз*
10 5 7 8	12

Решење

Претпоставимо да је број црвених и плавих куглица у првој и другој кутији c_1, p_1 тј. c_2, p_2. Прва могућност је да се све црвене куглице из прве кутије пребаце у другу, а да све плаве куглице из друге кутије пребаце у први, чиме се добија $c_1 + p_2$ премештања. Друга могућност је да се све плаве куглице из прве кутије пребаце у другу, а да све црвене куглице из друге кутије пребаце у први, чиме се добија $p_1 + c_2$ премештања. Решење се добија одређивањем мањег од ова два броја тј. њиховог *минимума*.

Одређивање минимума два броја је у програмском језику Пајтон најбоље урадити коришћењем библиотечке функције `min`.

```
# broj kuglica u prvoj kutiji
crvene1 = int(input()); plave1 = int(input())
# broj kuglica u drugoj kutiji
crvene2 = int(input()); plave2 = int(input())
# poredimo premestanje svih crvenih u drugu, a plavih u prvu
# i premestanje svih plavih u drugu i crvenih u prvu
print(min(crvene1 + plave2, crvene2 + plave1))
```

Минимум је могуће одредити а могуће је имплементирати и коришћењем гранања, на пример, коришћењем наредбе `if-else`.

```
# broj kuglica u prvoj kutiji
crvene1 = int(input()); plave1 = int(input())
# broj kuglica u drugoj kutiji
crvene2 = int(input()); plave2 = int(input())
# poredimo premestanje svih crvenih u drugu, a plavih u prvu
# i premestanje svih plavih u drugu i crvenih u prvu
iz1U2 = crvene1 + plave2; iz2U1 = crvene2 + plave1
if iz1U2 < iz2U1:
    najmanjiBrojPremestanja = iz1U2
else:
    najmanjiBrojPremestanja = iz2U1
print(najmanjiBrojPremestanja)
```

Гранање којим се одређује минимум је могуће имплементирати и коришћењем условног израза.

```
# broj kuglica u prvoj kutiji
crvene1 = int(input()); plave1 = int(input())
# broj kuglica u drugoj kutiji
crvene2 = int(input()); plave2 = int(input())
# poredimo premestanje svih crvenih u drugu, a plavih u prvu
# i premestanje svih plavih u drugu i crvenih u prvu
iz1U2 = crvene1 + plave2
iz2U1 = crvene2 + plave1
najmanjiBrojPremestanja = iz1U2 if iz1U2 < iz2U1 else iz2U1
print(najmanjiBrojPremestanja)
```

Задатак: Проја

Кукурузни хлеб, проја, се прави мешањем кукурузног и пшеничног брашна и воде (наравно, по жељи можете додати јаја, со, сир, кајмак и слично, али ми ћемо разматрати само неопходне састојке). Неопходно је да употребљена количина кукурузног брашна буде двоструко већа од употребљене количине пшеничног брашна. Количина воде која се додаје у мешавину брашна је двоструко мања од укупне количине брашна. Одредити коју количину воде треба додати да бисмо умесили највећу могућу проју од кукурузног и пшеничног брашна којим располажемо.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се количина кукурузног, а у другој количина пшеничног брашна којом располажемо (реални бројеви).

Излаз: Количину воде коју треба додати у мешавину брашна (реални број приказан на две децимале) исписати у јединој линији стандардног излаза.

Пример

Улаз	*Излаз*
1524 800	1143.00

Решење

Да би се од постојећих намирница направила највећа могућа количина хлеба потребно је задовољити све услове рецепта који захтева да кукурузно брашно чини два дела смеше а пшенично један. Укупна количина брашна је збирна количина та три дела а потребна количина воде коју треба одредити је пола укупне количине брашна.

Дакле, ако са M означимо количину једног дела смеше, количина пшеничног брашна је M, кукурузног брашна је $2M$, укупна количина брашна је $M + 2 \cdot M = 3 \cdot M$, а воде је $\frac{3 \cdot M}{2}$. Ако је расположива количина пшеничног брашна P_b, а кукурузног K_b, потребно је наћи највећу вредност M такву да важи $M \leq P_b$ и $2 \cdot M \leq K_b$, тј. $M \leq \frac{K_b}{2}$. Пошто је M мање или једнако од вредности P_b и $\frac{K_b}{2}$, оно је мање или једнако од мање од те две вредности тј. од $\min(P_b, \frac{K_b}{2})$ и то је уједно највећа могућа вредност за M. Када се одреди вредност $M = \min(P_b, \frac{K_b}{2})$, израчунава се и исписује количина воде $\frac{3 \cdot M}{2}$.

Најбољи начин да се одреди минимум два броја је да се употреби библиотечка функција. У језику Пајтон могуће је употребити функцију `min`.

```
# ucitavanje postojece kolicine kukuruznog i psenicnog brasna
kb = float(input()); pb = float(input())
# odredjivanje najvece moguce kolicine jednog dela mesavine M
M = min(kb / 2.0, pb)
# odredjivanje i ispis potrebne kolicine vode
v = 3.0 * M / 2.0
print(format(v, '.2f'))
```

Генерално, највеће x које задовољава систем неједначина $x \leq a_1, \ \ldots, \ x \leq a_n$ је $x = \min(a_1, \ldots, a_n)$. Дуално, најмање x које задовољава систем неједначина $x \geq a_1, \ \ldots, \ x \geq a_n$ је $x = \max(a_1, \ldots, a_n)$.

Задатак: Скупови спортиста

У одељењу има n ученика, од чега k ученика уме да игра кошарку, а f уме да игра фудбал. На спортско такмичење повешће се сви ученици који умеју да играју оба спорта. Колико ће најмање, а колико највише ученика ићи на такмичење?

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се три цела броја:

- n ($20 \leq n \leq 30$) - укупан број ученика у одељењу,
- k ($0 \leq k \leq n$) - број ученика који играју кошарку,
- f ($0 \leq f \leq n$) - број ученика који играју фудбал.

Излаз: На стандардни излаз исписати два цела броја (сваки у посебном реду):

- најмањи број ученика који ће ићи на такмичење,
- највећи број ученика који ће ићи на такмичење.

Пример

Улаз	*Излаз*
27 15 19	7 15

Решење

На основу принципа укључивања-искључивања важи да је:

$$|K \cup F| = |K| + |F| - |K \cap F|,$$

где $|K \cup F|$ означава број елемената уније скупа кошаркаша и фудбалера, $|K|$ означава број кошаркаша и једнак је датом броју k, $|F|$ број фудбалера и једнак је датом броју f, а $|K \cap F|$ означава број оних који играју и фудбал и кошарку. Пошто су и фудбалери и кошаркаши ученици одељења у коме има n ученика важи да је $|K \cup F| \leq n$. Зато је $|K| + |F| - |K \cap F| \leq n$, тј. $|K \cap F| \geq k + f - n$. Са друге стране, важи да је $|K \cap F| \geq 0$. Зато је

$$|K \cap F| \geq \max(k + f - n, 0).$$

Докажимо да се ова доња граница увек може достићи, тј. да је најмања вредност броја ученика који су добри у оба спорта управо $\max(k + f - n, 0)$. Заиста, ако је $k + f \leq n$ могуће је да се фудбалери и кошаркаши не преклапају. Са друге стране, ако је $k + f > n$ тада је могуће да њих $k + f - n$ тренирају оба спорта, да $n - f$ игра само кошарку, а $n - k$ игра само фудбал (сви ови бројеви су ненегативни, па је могуће направити баш овакав распоред).

Са друге стране важи да је $K \cap F \subseteq K, K \cap F \subseteq F$, па је $|K \cap F| \leq |K| = k, |K \cap F| \leq |F| = f$, тј.

$$|K \cap F| \leq \min(k, f).$$

Та вредност се може постићи ако је $K \subseteq F$ или је $F \subseteq K$ тј. ако сви они који тренирају онај спорт којег тренира мање ђака, уједно тренирају и онај други спорт.

Одређивање минимума два броја је у програмском језику Пајтон најбоље урадити коришћењем библиотечке функције `min`, а максимума коришћењем библиотечке функције `max`.

```
n = int(input())  # ukupan broj ucenika
k = int(input())  # broj kosarkasa
f = int(input())  # broj fudbalera
# najmanji broj ucenika koji su dobri u oba sporta
print(max(k + f - n, 0))
# najveci broj ucenika koji su dobri u oba sporta
print(min(k, f))
```

Задатак: Домине

Зоран има две домине. На свакој домини су тачкицама представљене две цифре од 1 до 9. Напиши програм који одређује највећи број који Зоран може написати помоћу своје две домине (сваку од њих може окренути како жели и домине може поређати како жели).

Улаз: Први ред стандардног улаза садржи бројеве на првој домини (раздвојене размаком), а други ред садржи бројеве на другој домини.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени највећи број.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`2 3` `1 6`	`6132`	`1 9` `3 4`	`9143`	`6 2` `3 6`	`6362`

Решење

Сваку од две домине је потребно окренути тако да већа цифра на тој домини буде испред мање (ако су цифре једнаке, свеједно је како се домина окреће). Редослед две домине се одређује тако да број записан на првој домини буде већи од броја записаног на другој.

Прву цифру сваке од две домине одређујемо као максимум две цифре на тој домини, а другу као њихов минимум. Два двоцифрена броја можемо упоредити и лексикографски (слично као у задатку Пунолетство): прва домина иде испред друге ако је њена прва цифра већа од прве цифре друге домине или су те цифре једнаке, а друга цифра прве домине је већа од друге цифре друге домине.

```
# ucitavamo cifre na dve domine
d1_str = input().split()
d11, d12 = int(d1_str[0]), int(d1_str[1])
d2_str = input().split()
d21, d22 = int(d2_str[0]), int(d2_str[1])
# odredjujemo vecu i manju cifru na prvoj domini
m11 = max(d11, d12)
m12 = min(d11, d12)
# odredjujemo vecu i manju cifru na drugoj domini
m21 = max(d21, d22)
m22 = min(d21, d22)
# odredjujemo bolji redosled domina leksikografskim poredjenjem parova
# (m11, m12) i (m21, m22)
if m11 > m21 or (m11 == m21 and m12 > m22):
    print(m11, m12, m21, m22)
else:
    print(m21, m22, m11, m12)
```

Једно могуће решење је и да експлицитно формирамо двоцифрене бројеве множењем прве цифре са 10 и додавањем друге, да их затим упоредимо и да тражени четвороцифрени број добијемо множењем већег двоцифреног са 100 и додавањем мањег (ово решење је исправно јер смо сигурни да се не јавља цифра 0). Када је број формиран, цифре можемо да издвојимо коришћењем целобројног дељења са 10 (као у задатку Збир цифара четвороцифреног броја).

```
# ucitavamo cifre na dve domine
d1_str = input().split()
d11, d12 = int(d1_str[0]), int(d1_str[1])
d2_str = input().split()
d21, d22 = int(d2_str[0]), int(d2_str[1])

# veci dvocifreni broj koji se moze napraviti pomocu prve domine
if d11 > d12:
    d1 = 10*d11 + d12
else:
    d1 = 10*d12 + d11

# veci dvocifreni broj koji se moze napraviti pomocu druge domine
if d21 > d22:
    d2 = 10*d21 + d22
else:
    d2 = 10*d22 + d21

# najveci cetvorocifreni broj koji se moze napraviti od domina
if d1 > d2:
```

```
    d = 100*d1 + d2
else:
    d = 100*d2 + d1

# ispisujemo njegovu jednu po jednu cifru
print((d // 1000) % 10,
      (d // 100) % 10,
      (d // 10) % 10,
      (d // 1) % 10);
```

Задатак: Интервали

Дата су два затворена интервала реалне праве $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$. Написати програм којим се одређује: њихов покривач (најмањи интервал реалне праве који садржи дате интервале), пресек (највећи интервал реалне праве који је садржан у оба интервала ако постоји) и дужину њихове уније (дела реалне праве који ти интервали покривају).

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се четири реална броја: a_1, b_1, a_2 и b_2, при чему важи $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$.

Излаз: На стандардни излаз исписује се 5 реалних бројева (заокружених на две децимале): у првом реду исписују се леви и десни крај покривача раздвојени размаком, у наредном леви и десни крај пресека раздвојени размаком или текст `presek ne postoji` ако се интервали не секу и у трећем реду се исписује дужина уније.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1	1.00 4.00
3	2.00 3.00
2	3.00
4	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0.5	-2.50 4.50
4.5	presek ne postoji
-2.5	5.00
-1.5	

Решење

Почетак покривача два интервала је мањи од два лева краја та два интервала (тј. $a_{pokrivac} = \min(a_1, a_2)$), а крај покривача је већи од два десна краја (тј. $b_{pokrivac} = \max(b_1, b_2)$). Напоменимо и да покривач увек постоји (пробај да објасниш зашто). Почетак евентуалног пресека је већи од два лева краја (тј. $a_{presek} = \max(a_1, a_2)$), а крај евентуалног пресека је мањи од два десна краја (тј. $b_{presek} = \min(b_1, b_2)$). Пресек постоји ако и само ако је $b_{presek} > a_{presek}$. На крају, дужину уније можемо једноставно одредити тако што од збира дужина једног и другог интервала одузме дужина пресека (дужину интервала рачунамо као разлику између његовог десног и левог краја).

```
# krajnje tacke intervala [a1, b1] i intervala [a2, b2]
a1 = float(input()); b1 = float(input())
a2 = float(input()); b2 = float(input())

# odredjujemo i ispisujemo pokrivac intervala
a_pokrivac = min(a1, a2) # prvi (levlji) pocetak
b_pokrivac = max(b1, b2) # drugi (desnji) kraj
print(format(a_pokrivac, '.2f'), format(b_pokrivac, '.2f'))

# odredjujemo i ispisujemo presek intervala i njegovu duzinu
a_desni = max(a1, a2) # drugi (desnji) pocetak
b_levi = min(b1, b2)  # prvi (levlji) kraj
if b_levi >= a_desni:
    print(format(a_desni, '.2f'), format(b_levi, '.2f'))
    duzina_preseka = b_levi - a_desni
else:
    print(”presek ne postoji”)
    duzina_preseka = 0.0
# moze i duzina_preseka = max(b_levi - a_desni, 0.0)
```

```
# odredjujemo i ispisujemo duzinu unije intervala
duzina1 = b1 - a1
duzina2 = b2 - a2
duzina_unije = duzina1 + duzina2 - duzina_preseka
print(format(duzina_unije, '.2f'))
```

Задатак: Позитиван део интервала

На целобројној бројевној правој дат је интервал $[a, b]$. Напиши програм који одређује дужину дела тог интервала који припада позитивном делу праве.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се два цела броја a и b ($-10^5 \leq a \leq b \leq 10^5$).

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља тражену дужину позитивног дела интервала.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
-3	5	2	3	-3	0
5		5		-1	

Решење

Један начин да одредимо дужину дела интервала $[a, b]$ који лежи на позитивном делу праве је да применимо технику проналажења пресека два интервала (приказану у задатку Интервали), при чему је први интервал $[a, b]$, а други је $[0, +\infty)$. Пресек одређујемо тако што одредимо већи од два почетка (то је број $\max(a, 0)$ и леви од два краја (пошто је један крај $+\infty$ то је број b), и затим ако је крај десно од почетка та два броја одузмемо, док је у супротном резултат нула.

```
# ucitavamo interval
a = int(input()); b = int(input())
# izracunavamo i ispisujemo duzinu pozitivnog dela tog intervala
p = max(b - max(0, a), 0)
print(p)
```

Још један начин је да одредимо десни и леви крај пресека и да их одузмемо. Десни крај је већи од бројева b и 0, док је леви крај већи од бројева a и 0. Зато је тражена дужина једнака $\max(b, 0) - \max(a, 0)$.

```
# ucitavamo interval
a = int(input()); b = int(input())
# izracunavamo i ispisujemo duzinu pozitivnog dela tog intervala
p = max(0, b) - max(0, a)
print(p)
```

Задатак се може решити и тако што се примени угнежђено (хијерархијско) гранање. Ако је $b \leq 0$ тада цео интервал лежи лево од координатног почетка и дужина његовог позитивног дела је 0. У супротном, ако је $a \geq 0$ тада цео интервал лежи десно од координатног почетка и дужина позитивног дела је $b - a$, а у супротном, ако је $a < 0$ тада је позитивни део интервала интервал $[0, b]$ чија је дужина b.

```
# ucitavamo interval
a = int(input()); b = int(input())

# izracunavamo i ispisujemo duzinu pozitivnog dela tog intervala

if b <= 0: # ceo interval lezi na nepozitivnom delu prave
    p = 0
else:      # desni kraj intervala je pozitivan
    if a >= 0:  # pocetak pozitivnog dela intervala je njegov levi kraj
        p = b - a
    else:       # pocetak pozitivnog dela intervala je 0
        p = b - 0
print(p)
```

Задатак: Део правоугаоника у првом квадранту

Дат је правоугаоник чије су странице паралелне координатним осама. Одредити површину дела тог правоугаоника који припада првом квадранту.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се 4 цела броја који представљају координате темена једне дијагонале правоугаоника.

Излаз: На стандардни излаз исписује се један цео број - површина дела правоугаоника у првом квадранту.

Пример

Улаз	*Излаз*
-3 5 2 7	4

Решење

Ако одредимо доње лево и горње десно теме (што можемо урадити применом минимума и максимума), тада површину можемо израчунати анализом разних случајева. Прво, ако се горње десно теме налази ван првог квадранта, тада је површина једнака нули. У супротном анализирамо положај доњег левог темена и у зависности од квадранта коме оно припада одређујемо површину.

```
# koordinate temena dve dijagonale pravougaonika
x1 = int(input()); y1 = int(input())
x2 = int(input()); y2 = int(input())

# odredjujemo levu i desnu ivicu
(xl, xd) = (min(x1, x2), max(x1, x2))
# odredjujemo donju i gornju ivicu
(yd, yg) = (min(y1, y2), max(y1, y2))

if xd <= 0 or yg <= 0:    # gornje desno teme nije u prvom kvadrantu
    P = 0
elif xl <= 0 and yd <= 0: # donje levo teme je u trecem kvadratnu
    P = xd * yg
elif xl > 0 and yd <= 0:  # donje levo teme je u cetvrtom kvadratnu
    P = (xd - xl) * yg
elif xl <= 0 and yd > 0:  # donje levo teme je u drugom kvadratnu
    P = xd * (yg - yd)
else:                     # donje levo teme je u prvom kvadratnu
    P = (xd - xl) * (yg - yd)

# stampamo površinu
print(P)
```

Задатак једноставније можемо решити тако што одредимо дужину дела горње странице правоугаоника и дужину дела десне странице правоугаоника који припадају првом квадранту (површина дела правоугаоника у првом квадранту је онда производ те две дужине). То се своди на проналажење дела дужи на x-оси тј. y-оси који припадају позитивном делу те осе, што је проблем који смо већ решавали у задатку Позитиван део интервала. Једина разлика је то што не знамо у ком редоследу су задате координате x_1 и x_2 нити у ком редоследу су задате координате y_1 и y_2, тако да се пре одређивања дужине позитивног дела сваког од њих врши одређивање мањег и већег од њих (ако су a и b бројеви који представљају крајње тачке неког интервала, онда се помоћу $l = \min(a, b)$ и $d = \max(a, b)$ могу одредити леви и десни крај тог интервала).

```
# a i b su krajnje tacke duzi koja lezi na koordinatnoj osi,
# odredjuje se deo te duzi koji pripada pozitivnom delu te ose
def pozitivan_deo_duzi(a, b):
    # odredjujemo levi i desni kraj duzi
    l = min(a, b); d = max(a, b)
    # odredjujemo duzinu pozitivnog dela_duzi
    return max(d, 0) - max(l, 0)
```

```
# koordinate temena dve dijagonale pravougaonika
x1 = int(input()); y1 = int(input())
x2 = int(input()); y2 = int(input())
# duzina dela desne ivice koji je desno od y-ose
ax = pozitivan_deo_duzi(x1, x2)
# duzina dela gornje ivice koji je iznad x-ose
by = pozitivan_deo_duzi(y1, y2)
# izracunavamo i ispisujemo povrsinu
print(ax * by)
```

Задатак: Темена правоугаоника

Библиотека за цртање омогућава цртање правоугаоника тако што се задају прво координате његовог горњег левог темена, а затим координате његовог доњег десног темена. Нама су познате координате крајњих тачака неке од његових дијагонала. Напиши програм који на основу тих координата одређује координате потребне за цртање. Координатни систем је организован тако да x-координата расте са лева на десно, док y-координата расте одозго наниже.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налазе се координате темена дијагонале (свако теме у посебном реду, при чему су координате раздвојене размаком).

Излаз: На стандардни излаз исписати координате горњег левог и доњег десног темена (свако теме у посебном реду, при чему су координате раздвојене размаком).

Пример

Улаз	*Излаз*
40 80 90 30	40 30 90 80

Задатак: H2SO4

Колико се молекула супорне киселине H_2SO_4 може направити од датог броја атома водоника H, сумпора S и кисеоника O?

Улаз: У свакој од две линије стандардног улаза налази се цео број који представља дати број атома, редом, водоника, сумпора, па кисеоника.

Излаз: У једној линији стандардног излаза исписати цео број који представља број могућих молекула сумпорне киселине.

Пример

Улаз	*Излаз*
75 58 106	26

Објашњење

Датих 75 атома водоника даје довољно атома водоника за 37 молекула H_2SO_4 и један додатан неискоришћени атом водоника, датих 58 атома сумпора за тачно 58 молекула H_2SO_4, док датих 106 атома кисеоника даје довољно атома кисеоника за 26 молекула H_2SO_4 и два додатна неискоришћена атома кисеоника. Ограничавајући фактор је најмањи од ових бројева молекула, а то је 26.

Задатак: Сијалице

У соби постоје плава и жута сијалица. За сваку сијалицу је познато време (у облику сат, минут, секунд) када је укључена и када је искључена. Напиши програм који одређује колико времена је соба била осветљена плаво, колико времена је била осветљена зелено и колико времена је била осветљена жуто (соба је осветљена зелено док су истовремено укључене плава и жута сијалица).

Улаз: Са стандардног улаза се уносе четири реда са по три броја раздвојена размацима (сат, минут и секунд укључивања плаве сијалица, сат, минут и секунд њеног искључивања, сат, минут и секунд укључивања жуте сијалице и сат, минут и секунд њеног искључивања).

Излаз: У првој линији стандардног излаза исписати три броја раздвојена двотачкама која представљају време (у сатима, минутима и секундама) које је соба била обојена плаво, у наредној линији у истом облику исписати време које је соба била обојена зелено и у последњој линији у истом облику исписати време које је соба била обојена жуто.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
13 15 0 14 20 0 13 45 0 15 30 0	0:30:0 0:35:0 1:10:0

Пример 2

Улаз	*Излаз*
10 50 20 12 40 11 8 45 30 10 30 20	1:49:51 0:0:0 1:44:50

Задатак: Краљево растојање

Напиши програм који одређује колико је потеза краљу на шаховској табли потребно да дође на дато поље. Краљ се у сваком потезу може померити за једно поље у било ком од 8 смерова (горе, доле, лево, десно и дијагонално).

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају четири броја између 1 и 8 (у свакој линији по два, раздвојена размаком). Прва два броја представљају координате полазног, а друга два броја координате долазног поља.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља најмањи број потеза потребан краљу да са полазног стигне до долазног поља.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1 2 3 4	2

Пример 2

Улаз	*Излаз*
8 3 2 5	6

Задатак: Део квадра у првом октанту

Дат је квадар чије су ивице паралелне координатним осама. Одредити запремину дела тог квадра који припада првом октанту (део простора у коме су све координате позитивне).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 целих бројева који представљају редом 3 координате једног темена, затим 3 координате другог темена исте просторне дијагонале квадра.

Излаз: На стандардни излаз исписује се један цео број - запремина дела квадра у првом октанту.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
-2 4 1 3 2 7	36

Пример 2

Улаз	*Излаз*
9 2 -5 1 6 -2	0

3.3.7 Разни задаци са гранањем

Задатак: Сутрашњи датум

Напиши програм који за унети датум одређује датум наредног дана.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три позитивна цела броја (сваки у засебном реду) која представљају дан, месец и годину једног исправног датума.

Излаз: На стандардни излаз исписати три цела броја која представљају дан, месец и годину сутрашњег датума. Сви бројеви се исписују у једном реду, а иза сваког броја наводи се тачка.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1 1 2016	2.1.2016.

Пример 2

Улаз	*Излаз*
28 2 2016	29.2.2016.

Пример 3

Улаз	*Излаз*
28 2 1900	1.3.1900.

Пример 4

Улаз	*Излаз*
31 12 2017	1.1.2018.

Решење

Као и увек у раду са датумима, пожељно је на располагању имати функцију која одређује број дана у сваком месецу (за то је потребно имати могућност провере и да ли је година преступна), коју смо показали у задатку Број дана у месецу.

Да бисмо одредили сутрашњи дан, прво ћемо увећати дан. У највећем броју случајева то је довољно, међутим, ако се након увећања дана добије непостојећи датум тј. ако увећани дан прелази број дана у том месецу, тада се прелази на први дан наредног месеца (тако што се месец увећа за један). Опет је у највећем броју (преосталих) случајева то довољно. Једини случај који још није покривен настаје ако је данашњи дан 31. децембар тј. ако се увећањем броја месеца добије месец који је већи од 12. У том случају се прелази на први јануар наредне године (тако што се месец постави на један, а година увећа за један).

Једно решење је такво да се за представљање сутрашњег дана користе посебне променљиве, независне од оних за представљање данашњег дана.

```
# provera da li je data godina prestupna
def prestupna(godina):
    return (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or (godina % 400) == 0

# broj dana u datom mesecu date godine
def broj_dana_u_mesecu(mesec, godina):
    if mesec in {1, 3, 5, 7, 8, 10, 12}:
        return 31
    elif mesec in {4, 6, 9, 11}:
        return 30
    else:
        return 29 if prestupna(godina) else 28

# ucitavamo danasnji datum
dan_danas = int(input());
mesec_danas = int(input())
godina_danas = int(input())
# izracunavamo sutrasnji datum
if dan_danas + 1 <= broj_dana_u_mesecu(mesec_danas, godina_danas):
    # sutrasnji dan pripada tekucem mesecu
    dan_sutra = dan_danas + 1
    mesec_sutra = mesec_danas
    godina_sutra = godina_danas
else:
    # danas je poslednji dan u mesecu
    if mesec_danas + 1 <= 12:
        # prelazimo na prvi dan narednog meseca
        dan_sutra = 1
        mesec_sutra = mesec_danas + 1
        godina_sutra = godina_danas
    else:
        # danas je poslednji dan u poslednjem mesecu (31. 12.)
        dan_sutra = 1
        mesec_sutra = 1
        godina_sutra = godina_danas + 1

# ispisujemo sutrasnji datum
print(dan_sutra, ".", mesec_sutra, ".", godina_sutra, ".", sep="")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Јучерашњи датум

Напиши програм који за унети датум одређује датум претходног дана.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три позитивна цела броја (сваки у засебном реду) која представљају дан, месец и годину једног исправног датума.

Излаз: На стандардни излаз исписати три цела броја која представљају дан, месец и годину јучерашњег датума. Сви бројеви се исписују у једном реду, а иза сваког броја наводи се тачка.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1	29
3	2
2016	2016

Пример 2

Улаз	*Излаз*
1	28.2.1900.
3	
1900	

Пример 3

Улаз	*Излаз*
1	31.12.2013.
1	
2014	

Задатак: Одсутна

Ана, Бранка, Весна и Гоца су четири сестре. Ана је виша од Бранке исто колико Бранка од Весне, као и Весна од Гоце. Ана и још две од сестара су биле на систематском прегледу, а четврта није. Одредити висину одсутне сестре ако су познате висине остале три.

Улаз: У сваком од три реда стандардног улаза по један цео број x $(85 \leq x \leq 200)$, висине трију сестара у центиметрима, међу којима је и Анина. Подаци су дати у произвољном редоследу, али тако да увек постоји јединствено целобројно решење.

Излаз: Један цео број, висина четврте сестре у сантиметрима.

Пример

Улаз	*Излаз*
176	166
146	
156	

Задатак: Врста троугла на основу углова

Дата су три конвексна угла изражена у степенима и минутима. Написати програм којим се проверава да ли то могу бити углови троугла, и ако могу какав је то троугао у односу на углове (оштроугли, правоугли или тупоугли).

Улаз: Са стандардног улаза уноси се шест целих бројева, сваки у посебној линији. Бројеви представљају три угла изражена у степенима. Подаци представљају исправно задате углове, степени и минути одређују исправно записане углове у интервалу од 0 степени и 0 минута, до 180 степени и 0 минута (минути су увек број између 0 и 59).

Излаз: Једна линија стандарног излаза која садржи реч `ostrougli`, `pravougli` или `tupougli`, ако троугао са датим угловима постоји, у зависности од врсте троугла, или реч `ne` ако не постоји троугао са датим угловима.

Пример

Улаз	*Излаз*
35	tupougli
23	
92	
37	
52	
0	

Задатак: Врста троугла на основу страница

Напиши програм који на основу дужина страница троугла проверава да ли такав троугао постоји и да ли је једнакостранични, једнакокраки или разностранични.

Улаз: Стандардни улаз садржи три природна броја a, b и c, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати `trougao ne postoji` ако не постоји троугао чије су дужине страница a, b и c, односно `jednakostranicni`, `jednakokraki` или `raznostranicni`, ако су ти бројеви дужине страница одговарајућег троугла.

Пример 1

Улаз	*Излаз*

`3`
`4`
`5`
	`raznostranicni`

Пример 2

Улаз	*Излаз*

`3`
`4`
`3`
	`jednakokraki`

Пример 3

Улаз	*Излаз*

`1`
`5`
`1`
	`trougao ne postoji`

Задатак: Тенис

Напиши програм који на основу броја освојених гемова два играча одређује исход сета у тенису (сет није последњи и при резултату 6:6 се игра тај-брејк).

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два природна броја (раздвојена размаком) који представљају број освојених гемова сваког играча редом.

Излаз: Ако је први играч освојио сет на стандардни излаз исписати поруку `pobedio prvi`. Ако је други играч освојио сет исписати `pobedio drugi`. Ако унети резултат неисправан исписати `neispravno`. Ако сет још није завршен исписати `nije zavrseno`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`7 5`	`pobedio prvi`

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`3 7`	`neispravno`

Глава 4

Итерација

Итерација подразумева понављање одређене процедуре, тако што се она у сваком кораку примењује на резултате њеног претходног извршавања, све док се не дође до жељеног резултата.

Један типичан пример итеративног поступка може бити израчунавање збира више бројева. На пример, када израчунавамо збир бројева 1, 5, 4, 8 и 2, крећемо од збира $1 + 5 = 6$, затим увећавамо тај збир за 4 тј. израчунавамо збир $6 + 4 = 10$, затим увећавамо тај збир за 8 тј. израчунавамо збир $10 + 8 = 18$ и на крају увећавамо тај збир за 2 тј. израчунавамо збир $18 + 2 = 20$.

У овом поглављу упознаћемо се са најчешће коришћеним итеративним поступцима и могућим начинима њиховог имплементирања.

4.1 Основни алгоритми над малим серијама елемената

Рачунари су јако добри у понављању истих поступака велики број пута и итеративни алгоритми се често примењују за обраду великих количина података (на пример, рачунар може да сабере милион бројева у делићу секунде). Итеративни алгоритми се у том случају програмирају уз помоћ **петљи** (некада се каже и **циклуса**). Ипак, да бисмо вам олакшали разумевање неколико најчешће коришћених итеративних поступака, у почетку ћемо их испрограмирати у варијанти у којој се понављање врши мали број пута (3-5) и такве програме можемо написати и без коришћења петљи (навођењем суштински идентичног кода неколико пута).

Најчешће коришћени итеративни алгоритми служе за анализу **бројевних серија**, које се понекад називају и *низови* или *секвенце* бројева. Овде ће термин *низ* бити коришћен само за серије бројева који су у програму смештени у једној променљивој сложеног типа (о овоме више касније).

4.1.1 Ажурирање вредности променљивих

Дефинисањем променљиве у програму ми јој додељујемо неку вредност. У досадашњим задацима смо могли да променљивама додељујемо вредност само једном, приликом њиховог дефинисања. На тај начин променљиве све време имају исту вредност током рада програма. У итеративним поступцима које ћемо сада упознати, биће потребно да променљивама мењамо вредности током извршавања програма (тиме се и оправдава њихов назив - променљиве). У наставку ћемо описати елементе програмског језика који се тичу измене (ажурирања) постојећих вредности променљивих.

Елементи програмског језика

Променљива може променити своју вредност тако што јој се **додели** нова вредност. На пример, наредни програм исписује 1, а затим 2, јер се током његовог извшавања вредност променљиве x мења са 1 на 2.

```
x = 1
print(x)
x = 2
print(x)
```

Често нова вредност променљиве зависи од њене старе вредности. Чест случај јесте повећање вредности неке променљиве за 1 (на пример, приликом пребројавања колико има објеката који задовољавају неки скуп

услова), а наравно могуће је повећати вредност променљиве и за неку другу вредност која је различита од 1 (на пример, приликом рачунања суме бројева из неког датог скупа суму ћемо увећавати за вредност сваког од елемената тог скупа). Некад је потребно смањити текућу вредност променљиве, повећати је одређени број пута или смањити одређен број пута. Оваква измена променљиве `x` може се постићи изразом облика `x = x op v`, где је `op` неки од наведених оператора `+, -, *, /`, а `v` вредност за коју се променљива мења. На пример, наредбом `zbir = zbir + a` вредност променљиве `zbir` се увећава за вредност променљиве `a`, док се наредбом `stepen = stepen * 2` вредност променљиве `stepen` увећава два пута. Ове наредбе не треба мешати са сличним записима из математике, који имају сасвим другачије значење (нпр. `x = x + 1` би у математици могло да представља једначину која нема решења).

Наредбе додељивања вредности облика `x = x op v` могу се скраћено записати као `x op= v` и у пракси се често користи скраћени запис. На пример, уместо писања `zbir = zbir + x`, можемо скраћено записати `zbir += x`. Оператори доделе `+=`, `-=`, `*=`, `/=` називају се **сложени оператори доделе**. Поред наведених оператора као сложени оператор може се користити и оператор `%=`, али је његова употреба ређа од осталих сложених оператора доделе.

Променљиве се у функцију преносе **по вредности**, што значи да се у функцијама праве копије променљивих и измена вредности променљивих у функцијама се не преноси аутоматски на вредности променљивих коришћених у позиву. Илуструјмо ово примером.

```
def povecaj_za_dva(x):
    print("Vrednost x na ulazu u funkciju je ", x)
    x = x + 2
    print("Vrednost x na izlazu iz funkcije je ", x)

x = 0
print("Pocetna vrednost x je", x)
povecaj_za_dva(x)
print("Nova vrednost x je", x)
```

На почетку програма променљива `x` има вредност 0. Она се преноси у функцију тако што функција има своју копију променљиве `x` која се такође иницијализује на 0 (јер је то вредност наведена у позиву). У функцији се та копија увећава за два и на излазу из функције исписује се да је вредност променљиве `x` једнака 2. Међутим, по повратку у програм копија нестаје, а оригинално `x` и даље има вредност 0.

Задатак: Цена хлеба

Хлеб је прво поскупео 10%, па је затим појефтинио 10%. Ако је позната почетна цена хлеба, напиши програм који одређује цену након тих промена.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава почетна цена хлеба (реалан број заокружен на две децимале).

Излаз: На стандардни излаз исписати крајњу цену хлеба (реалан број заокружен на две децимале).

Пример

Улаз	*Излаз*
`35.50`	`35.15`

Решење

Једно решење у складу са свим претходним у овој збирци било би да се уведу три променљиве (једна за почетну цену, једна за цену после поскупљења и једна за цену после појефтињења).

```
pocetna_cena = float(input())
cena_posle_poskupljenja = 1.1 * pocetna_cena
cena_posle_pojeftinjenja = 0.9 * cena_posle_poskupljenja
print(format(cena_posle_pojeftinjenja, '.2f'))
```

Задатак можемо да решимо и коришћењем само једне променљиве за цену, мењајући вредност те променљиве током извршавања програма.

```
cena = float(input())
cena = 1.1 * cena
cena = 0.9 * cena
print(format(cena, '.2f'))
```

Задатак: Сутрашњи датум

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Једно могуће решење је да се мењају вредности променљивих које репрезентују данашњи дан, чиме се можда мало штеди меморија (мада је то занемариво) и добија мало краћи програмски кôд, али се губи информација о данашњем дану након одређивања сутрашњег, што је лоше.

```
# provera da li je data godina prestupna
def prestupna(godina):
    return (godina % 4 == 0 and godina % 100 != 0) or (godina % 400) == 0

# broj dana u datom mesecu date godine
def broj_dana_u_mesecu(mesec, godina):
    if mesec in {1, 3, 5, 7, 8, 10, 12}:
        return 31
    elif mesec in {4, 6, 9, 11}:
        return 30
    else:
        return 29 if prestupna(godina) else 28

# ucitavamo datum
dan = int(input()); mesec = int(input()); godina = int(input())
# uvecavamo dan za jedan
dan = dan + 1
if dan > broj_dana_u_mesecu(mesec, godina):
    # taj dan ne postoji u ovom mesecu, pa prelazimo na prvi dan
    # narednog meseca
    dan = 1
    mesec = mesec + 1
    if mesec > 12:
        # taj mesec ne postoji, pa prelazimo na januar naredne godinu
        mesec = 1
        godina = godina + 1

# ispisujemo sutrasnji datum
print(dan, ".", mesec, ".", godina, ".", sep="")
```

Задатак: Подела јабука

Аца је добио n јабука и на једнаке делове (по трећину) поделио браћи Бранку, Цанету, и Душану. Преостале јабуке појео је сам. Бранко је своје јабуке поделио браћи (Аци, Цанету и Душану), а што је преостало појео је сам. Тако је затим поступио и Цане, а онда и Душан. Колико јабука после овакве поделе има свако од њих (занемарујући оне које су поједене).

Улаз: Број јабука n које је добио Аца.

Излаз: Број јабука које на крају има Аца (први ред), Бранко (други ред), Цане (трећи ред) и Душан (четврти ред).

Пример

Улаз	*Излаз*
100	44 33 19 0

Објашњење

Аца је добио 100 јабука. По 33 је дао Бранку, Цанету и Душану, а једну је појео сам, тако да су након прве поделе Аца, Бранко, Цане и Душан имали редом 0, 33, 33, 33 јабуке. Након тога, Бранко је поделио браћи по 11 јабука и ништа му није остало, тако да је број јабука након друге поделе 11, 0, 44, 44. Након тога, Цане је делио јабуке тако што је браћи дао по 14 јабука, а две је сам појео, тако да је након треће поделе стање 25, 14, 0, 58. На крају, Душан је браћи дао по 19 јабука, а једну преосталу је сам појео. Зато је на крају стање било 44, 33, 19, 0.

Решење

Основни корак поделе (који се понавља 4 пута) је да нека особа која пре тог корака има x јабука, даје по трећину својих јабука особама које имају y, z и w јабука. Након тог корака поделе особе чија је количина јабука била y, z и w увећавају своју количину јабука за целобројни количник броја x са 3 тј. $x \operatorname{div} 3$, док особи чија је количина јабука била x и која дели јабуке остаје 0 (што је нова вредност за x), јер све јабуке или поделе или поједе. Увећавање промењиве `x` за вредност `y` се може постићи или доделом `x = x + y` или, мало краће, оператором `+=` тј. наредбом `x += y`.

У првом кораку поделе особа x је Аца, док су остале три особе (y, z и w) Бранко, Цане и Душан, у другом је особа x Бранко, док су остале три особе Аца, Цане и Душан и тако даље.

На почетку Аца има дати број јабука n, док сви остали имају 0 јабука.

Могуће решење је да програм организујемо као низ од 16 наредби које одговарају сваком кораку њихове поделе.

```
# Aca u početku dobija sve jabuke, a ostali nemaju ništa
Aca = int(input())
Branko = 0
Cane   = 0
Dusan  = 0

# Aca daje po trecinu Branku,  Canetu i Dusanu - ostatak pojede
Branko += Aca // 3
Cane += Aca // 3
Dusan += Aca // 3
Aca = 0

# Branko daje po trecinu Aci,  Canetu i Dusanu - ostatak pojede;
Aca += Branko // 3
Cane += Branko // 3
Dusan += Branko // 3
Branko = 0

# Cane daje po trecinu Aci,  Branku i Dusanu - ostatak pojede;
Aca += Cane // 3
Branko += Cane // 3
Dusan += Cane // 3
Cane = 0

# Dusan daje po trecinu Aci, Branku i Canetu - ostatak pojede.
Aca += Dusan // 3
Branko += Dusan // 3
Cane += Dusan // 3
Dusan = 0

# ispisujemo preostali broj jabuka za svakoga
print(Aca)
print(Branko)
print(Cane)
print(Dusan)
```

Ако направимо функцију која реализује један корак поделе, ту функцију можемо позвати четири пута и то тако што у првом позиву параметар x везујемо за Ацин број јабука, у другом за Бранков, у трећем за Цанетов,

а у четвртом за Душанов, док се остали параметри (y, z и w) везују за број јабука остале браће.

Пошто функција треба да промени четири вредности, дефинисаћемо је тако да прима четири параметра, а да враћа уређену четворку која садржи нове вредности.

```
#include <iostream>

def podela(x, y, z, w):
    y1 = y + x // 3 # Osoba x osobama y, z i w
    z1 = z + x // 3 # daje po trecinu svojih jabuka,
    w1 = w + x // 3 # a ono sto ostane pojede sam.
    x1 = 0
    return (x1, y1, z1, w1)

Aca = int(input())
Branko = 0
Cane = 0
Dusan = 0

# Aca daje po trecinu Branku, Canetu i Dusanu - ostatak pojede
(Aca, Branko, Cane, Dusan) = podela(Aca, Branko, Cane, Dusan)
# Branko daje po trecinu Aci, Canetu i Dusanu - ostatak pojede
(Branko, Aca, Cane, Dusan) = podela(Branko, Aca, Cane, Dusan)
# Cane daje po trecinu Aci, Branku i Dusanu - ostatak pojede
(Cane, Aca, Branko, Dusan) = podela(Cane, Aca, Branko, Dusan)
# Dusan daje po trecinu Aci, Branku i Canetu - ostatak pojede
(Dusan, Aca, Branko, Cane) = podela(Dusan, Aca, Branko, Cane)

print(Aca)
print(Branko)
print(Cane)
print(Dusan)
```

Задатак: Јучерашњи датум

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

4.1.2 Основне статистике (збир, производ, просек, минумум, максимум)

Најчешће коришћени итеративни алгоритми служе за израчунавање статистика бројевних серија. На пример, једну такву серију могу чинити бројеви 1, 2, 3, 4 и 5. Најзначајније статистике су:

- збир елемената (збир бројева из примера је 15),
- производ елемената (производ бројева из примера је 120),
- минимум тј. најмањи од свих елемената (миминум бројева из примера је 1),
- максимум тј. највећи од свих елемената (максимум бројева из примера је 5).

Одређивање збира и производа

На примеру четворочлане серије елемената, прикажимо итеративне алгоритме за одређивање збира и производа. Збир четири броја се најједноставније израчунава изразом

```
broj1 + broj2 + broj3 + broj4
```

што је због леве асоцијативности сабирања (у програмирању) идентично изразу

```
((broj1 + broj2) + broj3) + broj4
```

Други начин да се израчунавање збира реализује је да се уведе помоћна променљива `zbir` која би се увећавала за текући елемент.

```
zbir = broj1;
zbir = zbir + broj2;
zbir = zbir + broj3;
...
```

За разлику од полазног решења у ком се збир израчунава само помоћу једног израза, ово решење је *итеративно*, и резултат се добија узастопном применом корака истог облика. Истакнимо још једном врло важну особину итеративних алгоритама, а то је да се током њиховог извршавања мења вредност неке променљиве (у овом случају то је променљива `zbir`).

Уместо да збир иницијализујемо првим елементом, можемо га иницијализовати нулом, а затим увећавати за један по један елемент.

```
zbir = 0;
zbir = zbir + broj1;
zbir = zbir + broj2;
...
```

Производ се одређује по веома сличном принципу, осим што уместо иницијализације нулом користимо иницијализацију јединицом (као неутралним елементом за множење) и што уместо сабирања користимо множење.

```
proizvod = 1;
proizvod = proizvod * broj1;
proizvod = proizvod * broj2;
...
```

У задацима је често потребно израчунати *просек* тј. *аритметичку средину* серије елемената, која је једнака количнику збира и броја елемената.

Одређивање минимума и максимума

Потпуно аналогно израчунавању збира неколико бројева, може се израчунати минимум, једино што се уместо операције сабирања два броја користи операција одређивања минимума два броја. У сваком кораку се рачуна минимум минимума свих претходних бројева и текућег броја.

Реално је претпоставити да на располагању имамо функцију којом се израчунава минимум два броја. Таква функција је обично део стандардне библиотеке, а када није, једноставно се може дефинисати. У језику Пајтон минимум два броја може се израчунати библиотечком функцијом `min`. Минимум четири броја онда можемо одредити наредним изразом.

```
min(min(min(broj1, broj2), broj3), broj4)
```

Максимум израчунавамо по потпуно истом принципу, једино што уместо минимума два броја у сваком кораку користимо максимум два броја.

И у случају налажења минимума уместо једног израза можемо дефинисати и итеративни алгоритам.

```
minimum = broj1
minimum = min(minimum, broj2)
minimum = min(minimum, broj3)
...
```

Ако би се уместо функције за рачунање минимума два броја употребило гранање (овај пут изражено условним изразом), дошло би се до следећег кода.

```
minimum = broj1
minimum = broj2 if broj2 < minimum else minimum
minimum = broj3 if broj3 < minimum else minimum
...
```

Ако би се уместо условног израза користила наредба гранања, добио би се следећи облик кода.

```
minimum = broj1
if broj2 < minimum:
   minimum = broj2
else:
```

```
    minimum = minimum
if broj3 < minimum:
    minimum = broj3
else:
    minimum = minimum
...
```

Јасно је да гране `else` немају никакав ефекат и могу се изоставити. Тиме добијамо уобичајени алгоритам одређивања минимума.

```
minimum = broj1
if broj2 < minimum:
    minimum = broj2
if broj3 < minimum:
    minimum = broj3
...
```

Дакле, промењиву `minimum` иницијализујемо вредношћу првог броја, а затим је редом поредимо са другим, трећим, четвртим и петим бројем и када год је неки од тих бројева мањи од дотадашње вредности минимума тј. вредности промењиве `minimum`, ажурирмо вредност те промењиве и постављамо је на број за који смо открили да је мањи од ње.

Можемо и мало прецизније да анализирамо претходни кôд и да докажемо његову коректност. У првом кораку вредност промењиве `minimum` биће минимум једночланог скупа `{broj1}`, у другом биће минимум двочланог скупа `{broj1, broj2}`, након трећег биће минимум скупа `{broj1, broj2, broj3}` и тако даље. Такав услов, дакле, важи у сваком кораку нашег програма и назива се *инваријанта*. Ако је, на пример, вредност промењиве `minumum` вредност минимума скупа `{broj1, broj2, broj3}` и ако је `broj4` мањи од вредности те промењиве, тада је `broj4` мањи од најмање вредности у скупу `{broj1, broj2, broj3}`, што значи да је мањи од свих вредности тог скупа и да је минимум скупа `{broj1, broj2, broj3, broj4}` управо `broj4`. Пошто се вредност промењиве `minimum` ажурира на вредност `broj4` одржава се услов да је вредност промењиве `minimum` управо минимум скупа `{broj1, broj2, broj3, broj4}`, тј. инваријанта је одржана. Са друге стране, ако услов не важи, то значи да је најмањи од бројева из скупа `{broj1, broj2, broj3}` мањи или једнак вредности `broj4` и то је уједно минимум скупа `{broj1, broj2, broj3, broj4}`. Пошто се вредност промењиве `minimum` не мења, инваријанта је опет одржана.

Као што се збир може иницијализовати нулом, а производ јединицом, што су неутралне вредности за сабирање тј. множење, тако се и минимум може иницијализовати вредношћу $+\infty$, а максимум вредношћу $-\infty$. У програмском језику Пајтон целобројни тип је неограничен, међутим, већина задатака у збирци је таква да се може радити и у другим језицима у којима постоје ограничења вредности целобројних типова. У језику Пајтон уместо вредности $+\infty$ можемо употребити вредност `sys.maxsize` (која је обично једнака $2^{63} - 1$), јер су задаци такви да се у њима не јављају бројеви већи од тога. Слично, уместо вредности $-\infty$ се може користити `-sys.maxsize-1` (која је обично једнака -2^{63}), јер је то најмањи број који се у другим језицима може представити уграђеним целобројним типовима података.

Рецимо и да се понављање кода може избећи ако би се употребила петља, што ћемо примењивати када будемо радили са дужим серијама елемената. Сви принципи алгоритма су исти и зато рад са малим серијама бројева представља одличан увод за рад са дужим серијама и петљама.

Низови и библиотечке функције

Уместо ручне имплементације одређивања минимума четири промењиве, можемо употребити низ и библиотечке функције за одређивање максимума низа. О разним врстама низова биће речи у поглављу о низовима, а до тада ћемо разматрати само низове који садрже мали број елемената и који су иницијализовани директним набрајањем њихових елемената.

У језику Пајтон низ који садржи пет бројева се може дефинисати на следећи начин.

```
a = [broj1, broj2, broj3, broj4, broj5]
```

Овакав низ се у Пајтону зове листа, а приликом набрајања елемената они се наводе у угластим заградаима. Могуће је у старту формирати празну листу, а касније додавати један по један елемент на ту листу.

```
a = []
a.append(int(input()))
```

```
a.append(int(input()))
...
```

Приметимо да бројање позиција елемената низа почиње увек од нуле!

Када је низ дефинисан, број, збир, минимум и максимум његових елемената можемо веома једноставно да одредимо редом помоћу функција `len`, `sum`, `min` и `max` које су уграђене у сам језик Пајтон.

```
...
n = len(a)        # odredjuje broj elemenata niza a
zbir = sum(a)     # odredjuje zbir svih elemenata niza a
minimum = min(a)  # odredjuje minimum svih elemenata niza a
maksimum = max(a) # odredjuje maksimum svih elemenata niza a
```

У Пајтону функцијама `min` и `max` можемо да проследимо додатни параметар `key=f`, где је `f` нека функција. Код тако задатог позива функције `min`, не тражимо елемент `x` низа `a` који је најмањи, него онај за који је `f(x)` најмање. Слично важи и за функцију `max`.

Задатак: Најлошији контролни

Ученици током године раде 5 контролних задатака. Наставник је обећао да ће приликом закључивања оцена сваком ученику занемарити најслабију оцену (ако постоји више таквих, занемариће само једну). Напиши програм који учитава 5 оцена једног ученика и исписује просечну оцену када се занемари најслабије урађени контролни.

Улаз: У свакој од пет линија стандардног улаза налази се по једна оцена (цео број између 1 и 5) коју је ученик добио.

Излаз: Просечна оцена без најлошијег контролног, заокружена на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	4.50
4	
4	
5	
3	

Решење

Одређивање збира и минимума

Просек свих оцена се може добити тако што се збир свих оцена подели бројем свих оцена. У нашем случају најлошија оцена не улази у просек и зато је потребно да израчунамо збир свих оцена без најлошије. Најједноставнији начин да то урадимо је да израчунамо збир свих пет оцена, а затим да од њега одузмемо најмању од тих пет оцена. Дакле, након што учитамо 5 оцена, израчунаћемо њихов збир и њихов минимум, одузети минимум од збира и поделити са 4

```
# Funkcija koja izracunava najmanji od 5 datih brojeva
def min_5_brojeva(broj1, broj2, broj3, broj4, broj5):
   return min(min(min(min(broj1, broj2), broj3), broj4), broj5)

# Ulazni podaci i njihovo ucitavanje
ocena1 = int(input())
ocena2 = int(input())
ocena3 = int(input())
ocena4 = int(input())
ocena5 = int(input())

# izracunavanje trazenog proseka
zbir_svih_ocena = ocena1 + ocena2 + ocena3 + ocena4 + ocena5
najlosija_ocena = min_5_brojeva(ocena1, ocena2, ocena3, ocena4, ocena5)
zbir_ocena_bez_najlosije = zbir_svih_ocena - najlosija_ocena
prosek_ocena_bez_najlosije = zbir_ocena_bez_najlosije / 4
```

```
# prikaz rezultata
print(format(prosek_ocena_bez_najlosije, '.2f'))
```

Збир и минимум можемо одредити и итеративним алгоритмима.

```
# funkcija koja izracunava najmanji od 5 datih brojeva
def min_5_brojeva(broj1, broj2, broj3, broj4, broj5):
    minimum = broj1
    minimum = min(minimum, broj2)
    minimum = min(minimum, broj3)
    minimum = min(minimum, broj4)
    minimum = min(minimum, broj5)
    return minimum

# ulazni podaci i njihovo ucitavanje
ocena1 = int(input())
ocena2 = int(input())
ocena3 = int(input())
ocena4 = int(input())
ocena5 = int(input())

# izracunavanje trazenog proseka
zbir_svih_ocena = ocena1 + ocena2 + ocena3 + ocena4 + ocena5
najlosija_ocena = min_5_brojeva(ocena1, ocena2, ocena3, ocena4, ocena5)
zbir_ocena_bez_najlosije = zbir_svih_ocena - najlosija_ocena
prosek_ocena_bez_najlosije = zbir_ocena_bez_najlosije / 4

# prikaz rezultata
print(format(prosek_ocena_bez_najlosije, '.2f'))
```

Итеративни алгоритам за одређивање минимума може бити заснован на гранању.

```
# funkcija koja izracunava najmanji od 5 datih brojeva
def min_5_brojeva(broj1, broj2, broj3, broj4, broj5):
    minimum = broj1
    if broj2 < minimum:
        minimum = broj2
    if broj3 < minimum:
        minimum = broj3
    if broj4 < minimum:
        minimum = broj4
    if broj5 < minimum:
        minimum = broj5
    return minimum

# ucitavanje pet ocena
ocena1 = int(input())
ocena2 = int(input())
ocena3 = int(input())
ocena4 = int(input())
ocena5 = int(input())

# izracunavanje trazenog proseka
zbir_svih_ocena = ocena1 + ocena2 + ocena3 + ocena4 + ocena5
najlosija_ocena = min_5_brojeva(ocena1, ocena2, ocena3, ocena4, ocena5)
zbir_ocena_bez_najlosije = zbir_svih_ocena - najlosija_ocena
prosek_ocena_bez_najlosije = zbir_ocena_bez_najlosije / 4

# prikaz rezultata
```

```
print(format(prosek_ocena_bez_najlosije, '.2f'))
```

Низови и библиотечке функције

Задатак је могуће решити и уз помоћ низова и библиотечких функција за сабирање и одређивање минимума.

```
# ulazni podaci i njihovo ucitavanje
ocena1 = int(input())
ocena2 = int(input())
ocena3 = int(input())
ocena4 = int(input())
ocena5 = int(input())

# izracunavanje trazenog proseka
zbir_svih_ocena = sum([ocena1, ocena2, ocena3, ocena4, ocena5])
najlosija_ocena = min([ocena1, ocena2, ocena3, ocena4, ocena5])
zbir_ocena_bez_najlosije = zbir_svih_ocena - najlosija_ocena
prosek_ocena_bez_najlosije = zbir_ocena_bez_najlosije / 4

# prikaz rezultata
print(format(prosek_ocena_bez_najlosije, '.2f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Најтоплији дан

Дате су дневне температуре редом за сваки дан једне седмице. Написати програм којим се одређује редни број најтоплијег дана те седмице (ако их има више исписати први). Дани у седмици су нумерисани бројевима од 1 до 7, почев од понедељка.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се 7 целих бројева из интервала $[-50, 50]$. Сваки број је у посебном реду. Бројеви редом представљају температуре измерене у понедељак, уторак, среду, четвртак, петак, суботу и недељу.

Излаз: На стандардном излазу исписати тражени редни број најтоплијег дана.

Пример

Улаз	*Излаз*
27 32 28 27 32 31 29	2

Решење

Алгоритам одређивања позиције максимума

У овом задатку тражи се позиција првог појављивања максимума у оквиру серије целих бројева. Дакле, потребно је одредити прву максималну вредност у оквиру серије и запамтити њену позицију.

Један од начина да се одреди позиција максимума неке (непразне) серије је да се мало прилагоди алгоритам одређивања вредности максимума који смо приказали у задатку Најлошији контролни. Поред вредности максимума одржава се и позиција на којој је та вредност први пут пронађена. Вредност максимума се иницијализује првим елементом серије, а позиција се иницијализује јединицом. Затим се један по један елемент серије учитава и пореди са текућом вредношћу максимума па се, ако је то потребно, ажурирају вредности максимума и његове позиције. Редни број текућег елемента у серији пратимо променљивом коју увећавамо за 1 сваки пут кад пређемо на нови дан. Ажурирање максимума вршимо само ако је текућа вредност строго већа од досадашњег максимума, чиме одређујемо прво појављивање максимума. Да бисмо одредили његово последње појављивање, ажурирање максимума би требало да вршимо када год се појави елемент који је већи или једнак од текућег максимума.

```
# t, rbr - temperatura i redni broj tekuceg dana
# maxT, rbrMax - temperatura i redni broj najtoplijeg dana

t = int(input()); rbr = 1  # ponedeljak
maxT = t; rbrMax = 1  # pretpostavljamo da je prvi dan najtopliji

t = int(input()); rbr = rbr + 1  # utorak
if t > maxT: # ako je dan topliji od prethodno najtoplijeg
   maxT = t; rbrMax = rbr # azuriramo vrednost i redni broj najtoplijeg

t = int(input()); rbr = rbr + 1  # sreda
if t > maxT: # ako je dan topliji od prethodno najtoplijeg
   maxT = t; rbrMax = rbr # azuriramo vrednost i redni broj najtoplijeg
   # ...
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Најбољи у две дисциплине

Три такмичара су радила тестове из математике и програмирања. За сваки предмет добили су одређени број поена (цео број од 0 до 50). Такмичари се рангирају по укупном броју поена из оба предмета. Ако два такмичара имају исти број поена, бољи је онај који има више поена из програмирања. Ако су два такмичара остварила идентичан успех, бољи је онај који има мањи редни број (јер су редни бројеви одређени на основу успеха на квалификационом такмичењу).

Потребно је написати програм који одређује победника такмичења.

Улаз: Учитавају се подаци за три такмичара. За сваког такмичара учитава се број поена из математике, а затим број поена из програмирања, сваки у посебном реду.

Излаз: Потребно је исписати редни број победника. Бројање почиње од 1.

Пример

Улаз	*Излаз*
38 42 43 40 40 43	3

Решење

Овај задатак је уопштење задатка Бољи у две дисциплине, тако што се не тражи максимум два, већ максимум три такмичара. Решење које ће овде бити приказано се веома лако може уопштити и на већи број такмичара.

Када би се победник одређивао само на основу укупног броја поена онда би овај задатак захтевао примену алгоритма одређивања позиције највећег од неколико датих бројева (види задатак Најтоплији дан). Међутим, сваки такмичар је представљен уређеним паром бројева (поенима из математике и програмирања) и потребно је одредити позицију највећег елемента међу три уређена пара, при чему је релација поретка међу тим паровима одређена условима задатка (пореди се прво укупан број поена, па онда поени из програмирања). Ово је класичан пример релације поређења узастопном применом неколико критеријума који се примењују један за другим, кажемо лексикографски.

Најелегантије решење је да ту релацију имплементирамо у засебној функцији која прихвата податке за два такмичара (четири броја) и враћа истинитосну (буловску) вредност `True` ако и само ако је први бољи од другог у односу на ову релацију. Када имамо функцију поређења на располагању, позицију максималног елемента одређујемо применом уобичајеног алгоритма за то.

Различити могући начини имплементације лексикографског поређења баш какво је потребно у овом задатку су описани у задатку Бољи у две дисциплине.

Поређење се може реализовати помоћу библиотечке подршке за торке и њихово лексикографско поређење (које је описано у задатку Пунолетство).

```
# provera da li je takmicar A bolji od takmicara B
def bolji(matA, progA, matB, progB):
    ukupnoA = matA + progA
    ukupnoB = matB + progB
    return (ukupnoA, progA) > (ukupnoB, progB)

# broj poena prvog takmicara iz matematike i programiranja
mat1 = int(input()); prog1 = int(input())
# broj poena drugog takmicara
mat2 = int(input()); prog2 = int(input())
# broj poena treceg takmicara
mat3 = int(input()); prog3 = int(input())

# pobednik - redni broj pobednika
# matMax, progMax - broj poena pobednika iz matematike i programiranja
# algoritam za odredjivanje pozicije maksimuma
# pretpostavljamo da je pobednik prvi takmicar
pobednik = 1; matMax = mat1; progMax = prog1
# ako je drugi bolji od dosadasnjeg najboljeg, pobednik je on
if bolji(mat2, prog2, matMax, progMax):
   pobednik = 2; matMax = mat2; progMax = prog2
# ako je treci bolji od dosadasnjeg najboljeg, pobednik je on
if bolji(mat3, prog3, matMax, progMax):
   pobednik = 3; matMax = mat3; progMax = prog3
print(pobednik)
```

Задатак: Најбољи такмичари

На такмичењу у пливању слободним стилом на 100 метара учествовало је 4 такмичара са старним бројевима од 1 до 4. Познати су резултати свих такмичара изражени у секундама. Написати програм који исписује стартне бројеве свих оних такмичара који су постигли најбољи резултат (најмање време) на том такмичењу.

Улаз: У четири линије стандардног улаза налазе се четири реална броја из интервала $[40, 100]$, сваки број у посебној линији. Бројеви представљају резултате такмичара редом од такмичара са стартним бројем 1 до такмичара са стартним бројем 4.

Излаз: На стандардном излазу исписују се стартни бројеви такмичара који су постигли најбољи резултат. Сваки стартни број је у посебној линији, старни бројеви су приказани од најмањег до највећег.

Пример

Улаз	*Излаз*
54.7	2
50.3	3
50.3	
58.6	

Решење

У овом задатку се тражи да се одреди минимум задате серије резултата такмичења у пливању и позиције свих елемената серије који имају минималну вредност. Одређивање позиције најмањег елемента разматрали смо у задатку Најтоплији дан међутим, за разлику од тог задатка у случају више појављивања минималне вредности овде се захтева проналажење свих позиција, док је тамо било довољно наћи само прву. Решење ове варијанте задатка могуће је урадити на неколико начина.

Провера минималности

Један начин да се то уради је да се за сваки резултат провери да ли он представља минимум серије, тј. да ли је мањи или једнак од осталих резултата. У оваквом решењу услов гранања је сложен, па се лако може десити да се пропусти неки од критеријума. Такође, за велики број такмичара ово решење би било прилично неефикасно.

```
# ucitavamo vremena cetiri takmicara
t1 = float(input())
```

```
t2 = float(input())
t3 = float(input())
t4 = float(input())
# za svakog takmicara proveravamo da li je bolji od ostalih
if t1 <= t2 and t1 <= t3 and t1 <= t4:
   print(1)
# da li je drugi bolji od ostalih
if t2 <= t1 and t2 <= t3 and t2 <= t4:
   print(2)
# da li je treci bolji od ostalih
if t3 <= t1 and t3 <= t2 and t3 <= t4:
   print(3)
# da li je cetvrti bolji od ostalih
if t4 <= t1 and t4 <= t2 and t4 <= t3:
   print(4)
```

Одређивање минимума и упоређивање са њим

Најједноставнији и уједно најефикаснији начин је да се прво одреди минимум серије, а да се затим један по један резултат такмичара пореди са том минималном вредношћу, при чему се полази од првог такмичара. У случају да је резултат такмичара једнак са минимумом, стартни број тог такмичара се приказује на стандардном излазу. Овим се заправо комбинује поступак одређивања најмање вредности серије који смо детаљно описали у задатку Најлошији контролни са накнадним поступком филтрирања серије који је описан у задатку Јутарње температуре.

```
# ucitavamo vremena takmicara
t1 = float(input())
t2 = float(input())
t3 = float(input())
t4 = float(input())
# pronalazimo najbolje vreme
minT = min(t1, t2, t3, t4)
# za svakog takmicara proveravamo da li je postigao to najmanje vreme
if (t1 == minT):
   print(1)
if (t2 == minT):
   print(2)
if (t3 == minT):
   print(3)
if (t4 == minT):
   print(4)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Најјефтинији за динар

У једној продавници је у току акција у којој се купцима који купе три производа нуди да најјефтинији од та три производа добију за један динар. Напиши програм који одређује снижену цену три производа.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се три цела броја из интервала од 50 до 5000 који представљају цене у динарима за три купљена производа.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља укупну снижену цену та три производа.

Пример

Улаз	*Излаз*
2499	6099
3599	
899	

Задатак: Просек скијаша

На такмичењу у скијашким скоковима поред удаљености коју скакач прескочи оцењује се и стил скакача. Пет судија оцењују стил скакача оценама од 0 до 20. Затим се од свих добијених оцена избришу једна најмања и једна највећа. Коначна оцена стила скакача рачуна се као просек преосталих оцена. Напиши програм којим се на основу оцена 5 судија одређује коначна оцена стила скакача.

Улаз: У свакој од пет линија стандардног улаза налази се по једна оцена стила скакача (цео број између 0 и 20) коју је скијаш добио од пет судија.

Излаз: Коначна оцена стила скакача приказана на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5 0 1 5	3.00

Задатак: Врста троугла на основу углова

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Растојање тачка правоугаоник

Деца се играју јурке у школском дворишту правоугаоног облика и око њега. Правила игре су таква да је ученик безбедан када се ухвати за ограду. Напиши програм који одређује колико је најмање растојање које Ђока треба да претрчи да би био безбедан (он се у почетку може налазити и у дворишту и ван њега).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 реалних бројева (сваки у посебном реду):

- x_0, y_0 ($0 \leq x_0, y_0 < 1000$) - координате доњег левог темена правоугаоника који представља школско двориште у координатном систему постављеном тако да су ивице правоугаоника паралелне координатним осама.
- x_1, y_1 ($x_0 < x_1 \leq 1000$, $y_0 < y_1 \leq 1000$) координате горњег десног темена правоугаоника.
- x, y ($0 \leq x_0, y_0 \leq 1000$) - координате тачке на којој се налази Ђока.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број - најкраће растојање Ђоке до ограде у метрима (допуштена је толеранција је један центиметар, тј. резултат исписати заокружен на две децимале).

Пример 1

Улаз	*Излаз*
100 100 200 200 50 170	50.00

Пример 2

Улаз	*Излаз*
100 100 200 200 50 300	111.80

Задатак: Позиција највећег угла троугла

Дата су два угла разностраничног троугла у степенима, минутима и секундама. Одредити који од углова троугла је највећи, први по редоследу уноса, други по редоследу уноса или трећи, одређен у програму.

Улаз: У свакој од шест линија стандардног улаза налази се по један цео број. Бројеви редом представљају степене, минуте (мање од 60) и секунде (мање од 60), прво једног, па другог угла троугла. Збир дата два угла је мањи од 180 степени.

Излаз: У једној линији стандардног излаза исписати број 1, 2 или 3.

Пример

Улаз	*Излаз*
75 30 14 23 15 45	3

Задатак: Најближи просеку

Написати програм који за четири дата броја одређује који је од та четри броја најближи аритметичкој средини датих бројева (ако су два броја једнако близу исписати први).

Улаз: У четири линије стандардног улаза налазе се четири реална броја.

Излаз: У једној линији стандардног излаза приказати један од унетих реалних бројева, на две децимале, најближи њиховој аритметичкој средини.

Пример

Улаз	*Излаз*
24.3 20.2 23.5 22.7	22.70

Задатак: Први и други максимум

Написати програм којим се одређују највећа два различита броја од пет датих целих бројева.

Улаз: На станадардном улазу налазе се 5 целих бројева, сваки у посебној линији.

Излаз: Прва линија стандарног излаза садржи највећи број од датих 5 бројева. Друга линија стандардног излаза садржи други по величини цео број од датих 5 бројева. Ако су сви унети бројеви једнаки друга линија треба да садржи само знак '-'.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
2 7 -4 7 3	7 3

Пример 2

Улаз	*Излаз*
12 12 12 12 12	12 -

Задатак: Аутомобил у вођству

Три аутомобила крећу са стартне позиције у тренуцима $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ константним брзинама v_1, v_2 и v_3. Приказати стартне бројеве аутомобила који су на водећој позицији у тренутку t ($t \geq 0$). Ако ни један аутомобил још није кренуо, сва три су у водећој позицији.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се седам целих бројева, сваки у засебној линији t_1, v_1, t_2, v_2, t_3, v_3, t где t_1, t_2, t_3, t представљају времена у секундама, а v_1, v_2, v_3 брзине у метрима по секунди.

Излаз: На стандардни излаз исписати један или више целих бројева (сваки у посебном реду) који представљају редне бројеве аутомобила (1, 2 или 3) који су на водећој позицији. Ако је више аутомобила истовремено у вођству, њихове редне бројеве исписати у растућем редоследу.

Пример

Улаз	*Излаз*
10	1
5	2
5	
4	
0	
2	
30	

4.1.3 Филтрирање

Филтрирање подразумева да се из серије елемената издвоје они који задовољавају неки задати услов. Често нас занима да одредимо статистике само таквих елемената (њихов број, збир, просек итд.).

Задатак: Јутарње температуре

Дате су јутарње температуре за 4 дана T_1, T_2, T_3 и T_4. Одредити број дана од та 4 дана када је јутарња температура била испод просечне температуре за та 4 дана.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају четири реална броја (сваки је у посебној линији) који представљају јутарње температуре за четири дана.

Излаз: У првој линији стандардног улаза исписује се просечна температура за та четири дана, заокружена на две децимале.

У другој линији стандардног излаза исписује се број дана када је температура била испод просечне.

Пример

Улаз	*Излаз*
27.3	23.20
20.2	2
23.5	
21.8	

Решење

Потребно је прво одредити аритметичку средину четири унете температуре (просечну температуру) као количник њиховог збира и броја 4 (тј. реалног броја `4.0`), слично као, на пример, у задатку Најлошији контролни. Бројач дана чија је температура била испод просечне треба иницијално поставити на 0. Затим, за сваку температуру треба проверити да ли је нижа од просечне, па ако јесте бројач треба увећати за 1.

Приказани алгоритам је класичан пример алгоритма израчунавање статистике *филтрирање серије* тј. алгоритма у којем се траже да се обраде (у овом случају преброје) елементи који задовољавају неки дати услов.

```
# unosimo cetiri temperature
T1 = float(input())
T2 = float(input())
T3 = float(input())
T4 = float(input())
# odredjujemo i ispisujemo njihovu aritmeticku sredinu
prosekT = (T1 + T2 + T3 + T4) / 4.0
print(format(prosekT, '.2f'))
# brojimo one dane u kojima je temperatura ispod proseka
brojac = 0
if (T1 < prosekT):
   brojac = brojac + 1
if (T2 < prosekT):
   brojac = brojac + 1
if (T3 < prosekT):
   brojac = brojac + 1
if (T4 < prosekT):
   brojac = brojac + 1
print(brojac)
```

Задатак: Квалификациони праг

Ако се знају поени 4 такмичара и квалификациони праг на такмичењу, одредити колико такмичара је освојило довољно поена и квалификовало се у следећи круг такмичења, а колики је просек поена оних који се нису квалификовали.

Улаз: У пет линија стандардног улаза налазе се пет целих бројева из интервала $[0, 100]$, сваки број у посебној линији. Прва четири броја представљају освојене поене такмичара, а пети број је квалификациони праг.

Излаз: На стандардном излазу исписује се:

- у првој линији број такмичара који су се квалификовали,
- у другој линији просек поена (на две децимале) за групу такмичара која се није квалификовала, а у случају да су се сви квалификовали у другој линији исписати знак '-'.

Пример

Улаз	*Излаз*
0 30 2 99 30	2 1.00

Решење

Потребно је одредити број такмичара који су се квалификовали и просек поена такмичара који се нису квалификовали. Просек поена такмичара који се нису квалификовали добијамо као количник збира њихових поена и броја таквих такмичара. Иако је потребно да знамо и број такмичара који су се квалификовали, и број оних који нису, нема потребе да за то уводимо два бројача, јер ако уведемо само бројач за такмичаре који се нису квалификовали, онда број такмичара који су се квалификовали можемо одредити као разлику укупног броја такмичара (у нашем примеру 4) и броја такмичара који се нису квалификовали (слично би се радило када би се увео бројач за такмичаре који су се квалификовали). У нашем решењу одређујемо број такмичара који се нису квалификовали и збир њихових поена. Бројач такмичара који се нису квалификовали и збир њихових поена поставимо на 0. Затим, за сваког такмичара проверимо да ли је његов број поена мањи од квалификационог прага, па ако јесте бројач увећамо за 1, а збир за поене такмичара. Напоменимо да се у овом задатку, слично као у задатку Јутарње температуре врши израчунавање статистика филтриране серије (тражи се просек, тј. збир и број свих елемената серије који задовољавају дати услов).

```
# poeni takmicara
p1 = int(input())
p2 = int(input())
p3 = int(input())
p4 = int(input())
# kvalifikacioni prag
prag = int(input())
# izracunavamo zbir poena i broj onih koji se nisu kvalifikovali
br = 0
zbir = 0
if p1 < prag:
   br = br + 1; zbir = zbir + p1
if p2 < prag:
   br = br + 1; zbir = zbir + p2
if p3 < prag:
   br = br + 1; zbir = zbir + p3
if p4 < prag:
   br = br + 1; zbir = zbir + p4

# ispisujemo broj onih koji su se kvalifikovali
print(4 - br)
# ako postoji bar neko ko se nije kvalifikovao
if br > 0:
   # izracunavamo i ispisujemo prosek svih onih koji se nisu
```

```
    # kvalifikovali
    prosek = zbir / br
    print(format(prosek, '.2f'))
else:
    print("-")
```

Задатак: Претицање

Три аутомобила стартних бројева 1, 2, 3 крећу са исте стартне позиције редом у тренуцима t_1, t_2, t_3 ($0 \leq t_1 < t_2 < t_3$), и крећу се константним брзинама v_1, v_2, v_3. Написати програм којим одређујемо тренутак кад се деси последње претицање, или ако нема претицања исписати текст `nema`.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 реалних бројева. Прва линија садржи бројеве t_1, v_1, друга бројеве t_2, v_2, а трећа бројеве t_3, v_3.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља време последњег претицања, заокружен на две децимале или текст `nema` ако претицања није било.

Пример 1

Улаз	*Излаз*

`1.6 20`
`2 12`
`7.4 2.1`
	`nema`

Пример 2

Улаз	*Излаз*

`6.3 9`
`15 18`
`19 13`
	`47.57`

Решење

Ако је прво возило кренуло у тренутку t_a брзином v_a, а друго у каснијем тренутку t_b брзином v_b, тада ће друго возило престићи прво ако и само ако је од њега брже тј. ако је $v_b > v_a$. Пошто крећу са истог старта, претицање настаје у оном тренутку када оба возила пређу исти пут. Пошто се креће равномерно, пут који у неком тренутку t пређе прво возило је $s_a = (t - t_a) \cdot v_a$, док друго возило прелази пут $s_b = (t - t_b) \cdot v_b$ (веза између брзине, времена и пређеног пута описана је у задатку Путовање). Пошто ти путеви треба да буду једнаки важи да је $(t - t_a) \cdot v_a = (t - t_b) \cdot v_b$ одакле је

$$t = \frac{v_b \cdot t_b - v_a \cdot t_a}{v_b - v_a}.$$

Пошто у нашој трци учествују три аутомобила, могућа су три потенцијална претицања. Зато разматрамо могућност да друго возило претекне прво, да треће возило претекне прво и да треће возило претекне друго. Тако добијамо малу серију бројева које чине времена претицања и којих има између 0 и 3. Ако не постоји ни једно време претицања (ако је свако следеће возило спорије или једнако брзо као претходно) тада треба пријавити да претицања нема, а у супротном треба пронаћи последње време претицања као максимум те серије времена.

У овом задатку, дакле, тражимо максимум филтриране серије, која може бити и празна. Начини да се то уради представљају модификације начина да се одреди максимум тј. минимум серије бројева који су описани у задатку Најлошији контролни.

Алгоритам одређивања максимума филтриране серије

Један начин да ово реализујемо је да памтимо последње време претицања до тада и податак о томе да ли је пронађено бар једно претицање. Упоређујемо наведене парове возила и да када наиђемо на ново време претицања, време последњег претицања ажурирамо или ако је ово прво пронађено претицање или ако ово претицање наступа после до тада последњег претицања.

```
# učitavamo podatke:
#   vremena u kome su tri vozila krenula sa starta i
#   brzine ta tri vozila
str = input().split(); t1 = float(str[0]); v1 = float(str[1])
str = input().split(); t2 = float(str[0]); v2 = float(str[1])
str = input().split(); t3 = float(str[0]); v3 = float(str[1])

bilo_preticanja = False      # da li je pronađeno jedno preticanje
t_poslednjeg_preticanja = 0  # vreme poslednjeg preticanja
```

```
# proveravamo da li drugi automobil može pretećі prvi
if v2 > v1:
   t_preticanja = (v2*t2 - v1*t1) / (v2 - v1)
   if not bilo_preticanja or t_preticanja > t_poslednjeg_preticanja:
      t_poslednjeg_preticanja = t_preticanja
   bilo_preticanja = True
# proveravamo da li treći automobil moze pretećі prvi
if v3 > v1:
   t_preticanja = (v3*t3 - v1*t1) / (v3 - v1)
   if not bilo_preticanja or t_preticanja > t_poslednjeg_preticanja:
      t_poslednjeg_preticanja = t_preticanja
   bilo_preticanja = True
# proveravamo da li treći automobil moze pretećі drugi
if v3 > v2:
   t_preticanja = (v3*t3 - v2*t2) / (v3 - v2)
   if not bilo_preticanja or t_preticanja > t_poslednjeg_preticanja:
      t_poslednjeg_preticanja = t_preticanja
   bilo_preticanja = True

# ako je bilo preticanja, prijavljujemo vreme poslednjeg preticanja
if bilo_preticanja:
   print(format(t_poslednjeg_preticanja, '.2f'))
else:
   print(”nema”)
```

Понављање сличног кода се може избећи или коришћењем петље или издвајањем ажурирања максимума у помоћну функцију (при чему је петља много природније решење). Коришћење логичке променљиве у којој памтимо да ли је до тада детектовано претицање може се избећи ако се вредност времена последњег претицања иницијализује нулом (тиме се постиже да када се наиђе на прво претицање дође до ажурирања времена последњег претицања, јер свако претицање наступа сигурно у тренутку $t > 0$, пошто аутомобили не крећу истовремно са старта).

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Берза

Трговац на берзи је током једне радне недеље сваки дан или остваривао зараду или је губио новац. Од свих дана у којима је нешто зарадио, одредити дан у коме је најмање зарадио и вредност коју је тог дана зарадио (ако је више таквих дана, пријавити први) или пријавити да је свих дана губио новац.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се 5 целих бројева из интервала $[-10000, 10000]$ (износи које је трговац остварио у понедељак, уторак, среду, четвртак и петак), сваки у посебном реду.

Излаз: Ако је трговац у неком дану остварио зараду (износ је строго већи од нуле), на стандардни излаз у првом реду исписати најмањи износ зараде који је остварен током недеље и у другом реду ознаку дана (`PON`, `UTO`, `SRE`, `CET` или `PET`) у коме је остварен тај најмањи профит. Ако ниједан дан није остварена зарада, исписати ред који садржи само карактер `-`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3200	1350
-420	CET
-10	
1350	
5670	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
-4700	-
-360	
-1000	
-1550	
-3245	

4.1.4 Претрага

Претрага подразумева испитавање да ли у серији постоји неки елемент који задовољава дати услов (на пример, да ли је неки од ученика у одељењу постигао максималан број поена на контролном задатку). Такође, могуће је испитивати да ли сви елементи задовољавају услов, тражити позицију првог или позицију последњег елемента који задовољава или не задовољава дати услов и слично.

Алгоритам претраге се своди на итеративно израчунавање дисјункције или конјункције. Постоји велика сличност између алгоритма претраге и алгоритама израчунавања збира, производа, минимума и максимума серије које смо већ разматрали. На пример, провера да ли је неки од бројева `a1`, `a2` или `a3` негативан се своди на то да се провери да ли је први број негативан, да ли је други број негативан и тако даље. Потребно је дакле израчунати вредност логичког израза

```
(a1 < 0) or (a2 < 0) or (a3 < 0)
```

Веома слично као и у случају израчунавања збира, производа или минимума/максимума, резултујућу променљиву постављамо на неутралну вредност (`False` у случају дисјункције тј. `True` у случају конјункције), а онда је у сваком кораку ажурирамо применом одговарајућег оператора.

```
postoji = False
postoji = postoji or a1 < 0
postoji = postoji or a2 < 0
postoji = postoji or a3 < 0
```

Даље, може се приметити да ако је услов `ai < 0` испуњен, онда вредност променљиве `postoji` постаје `True` а ако није испуњен, онда остаје онаква каква је и била раније. На основу тога, претходни кôд се може написати у следећем облику:

```
postoji = False
if a1 < 0: postoji = True
if a2 < 0: postoji = True
if a3 < 0: postoji = True
```

Оператор `or` има лењу семантику тј. у изразу `x or y` вредност израза `y` се не израчунава ако израз `x` има вредност `True`. Зато можемо и да сваки наредни услов проверавамо само ако претходни није задовољен.

То постижемо тиме што уместо независних провера користимо конструкцију `elif` (илустровану у задатку Агрегатно стање) и сваки наредни услов проверавамо само ако претходни није испуњен.

```
postoji = False
if a1 < 0: postoji = True
elif a2 < 0: postoji = True
elif a3 < 0: postoji = True
```

Алгоритам линеарне претраге је нарочито значајан код дужих серија, и о њему ће више бити речи у задатку Негативан број.

Задатак: Чудно радно време

Паја има обичај да да у сред дана напусти радно место и оде негде на кратко. Због тога је објавио необично радно време, које се састоји од 4 интервала, са три паузе (четворократно радно време). Напиши програм који проверава да ли Паја ради у тренутку t. Сматра се да сваки од ових интервала садржи свој почетак, а не садржи свој крај.

Улаз: На стандардном улазу у прва четири реда је задат по један интервал Пајиног радног времена. Сваки интервал је задат сатом и минутом почетка и сатом и минутом краја (цели бројеви s_1, m_1, s_2, m_2 раздвојени размаком, $0 \leq s_i \leq 23, 0 \leq m_i \leq 59$, за $i \in \{1, 2\}$). Интервали су дисјунктни и поређани хронолошки. У петом реду стандардног улаза налазе се цели бројеви S, M раздвојени зарезом, $0 \leq S \leq 23, 0 \leq M \leq 59$, који представљају тренутак t, за који се проверава да ли је у Пајином радном времену.

Излаз: На стандардни излаз написати `da` ако је t у Пајином радном времену тј. `ne` у супротном.

Пример 1

Улаз	*Излаз*

`9 0 11 30`
`12 15 14 45`
`15 0 17 0`
`17 15 19 0`
`14 45`
	`ne`

Решење

Да бисмо утврдили да ли је тренутак t у Пајином радном времену, можемо да користимо логичку промењиву $otvoreno$.

На почетку овој промењивој доделимо вредност `False` , а затим за сваки интервал радног времена редом проверавамо да ли садржи тренутак t. Ако је за неки од интервала услов испуњен, промењивој $otvoreno$ додељујемо вредност `True`. . На тај начин, по завршетку поступка промењива $otvoreno$ саопштава да ли тренутак t припада бар једном од дата 4 интервала.

```
# ucitavanje vremena (sat i minut u istoj liniji, razdvojeni razmakom)
def ucitaj_vreme():
    s, m = input().split()
    return int(s) * 60 + int(m)

# ucitavanje vremenskog intervala (sat i minut pocetka, pa sat i minut kraja,
# sva 4 broja u istoj liniji, razdvojeni razmakom)
def ucitaj_interval():
    s1, m1, s2, m2 = input().split()
    return [int(s1) * 60 + int(m1), int(s2) * 60 + int(m2)]


# ucitavamo intervale radnog vremena
a1, b1 = ucitaj_interval()
a2, b2 = ucitaj_interval()
a3, b3 = ucitaj_interval()
a4, b4 = ucitaj_interval()

# ucitavamo trenutak dolaska
t = ucitaj_vreme()

# proveravamo da li je dolazak u nekom od intervala radnog vremena
otvoreno = False
if a1 <= t and t < b1:
    otvoreno = True
if a2 <= t and t < b2:
    otvoreno = True
if a3 <= t and t < b3:
    otvoreno = True
if a4 <= t and t < b4:
    otvoreno = True

if otvoreno:
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Задатак: Постоји ли троугао датих дужина страница

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Једна могућност је да се сваки услов проверава посебно и на основу његове провере поставља вредност логичке промењиве. Логичка промењива се на почетку поставља на вредност `True` (претпостављамо да троугао постоји), а затим испитујемо један по један услов и ако је услов нарушен, вредност промењиве постављамо на `False`.

Приметимо да када се установи да неки услов није испуњен, није неопходно вршити проверу даље, тако да је уместо три независне наредбе `if` могуће употребити надовезана гранања помоћу кључне речи `elif`.

```
# ucitavamo duzine stranica
```

```
a = float(input())
b = float(input())
c = float(input())

# proveravamo da li postoji trougao sa duzinama stranica a, b i c
postoji_trougao = True
if a + b <= c:
    postoji_trougao = False
elif b + c <= a:
    postoji_trougao = False
elif a + c <= b:
    postoji_trougao = False

# ispisujemo rezultat
if postoji_trougao:
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Проверу је могуће реализовати и у функцији у којој се проверава један по један услов и чим се наиђе на неки који није испуњен, враћа се вредност `False`. (наредбом `return`). На крају функције, ако су сви услови били испуњени враћа се вредност `True`. Пошто се у свакој грани јавља наредба `return` извршавање функције бива прекинуто када се уђе у било коју од грана. Зато није неопходно користити `else` (мада није ни погрешно).

```
# provera da li postoji trougao sa stranicama duzine a, b i c
def postoji_trougao(a, b, c):
    if a + b <= c:
        return False
    if b + c <= a:
        return False
    if a + c <= b:
        return False
    return True

# ucitavamo duzine stranica trougla
a = float(input())
b = float(input())
c = float(input())

# proveravamo da li postoji trougao sa duzinama stranica a, b i c
if postoji_trougao(a, b, c):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Задатак: Статус објављен током школе

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Непливачи

Деда Раде жели да упише својих четворо унука непливача у школу пливања. Инструктор му је рекао да је остао само један слободан термин, за који могу да се пријаве само деца виша од 110 сантиметара. Деда Раде не жели да раздваја унуке, па ће их уписати у школу пливања само ако сви испуњавају услов. Написати програм који одређује да ли деда Раде већ сада може да упише свих четворо унука у школу пливања.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе четири цела позитивна броја не већа од 180, сваки у посебном реду – висине деда Радетових унука.

Излаз: На стандардни излаз исписати реч SVI ако је свако од четворо деце више од 110cm, а реч NIKO ако бар једно дете није више од 110 cm.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
131	SVI
111	
128	
117	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
131	NIKO
110	
128	
117	

4.1.5 Сортирање и примене

Због својих великих примена **сортирање** је један од најбоље проучених проблема у рачунарству. Задатак сортирања је да се дата серија уреди у неком траженом поретку (на пример, да се бројеви уреде по величини). Сортирање је у *растӯћем* поретку ако је сваки наредни елемент строго већи од претходног а у *неопада̄ћем* поретку ако је сваки наредни елемент већи или једнак од претходног. Аналогно се дефинише сортирање у *опада̄ћем* и *нераста̄ћем* поретку.

Сортирање селекцијом

Један од могућих приступа сортирању три променљиве `a`, `b` и `c` јесте тај да прво покушамо да разменама променљивих осигурамо да се најмања вредност налази у променљивој `a`. За то су нам довољна два поређења и највише две размене. Прво упоређујемо вредности `a` и `b` и размењујемо их само ако је `b` мање од `a`, чиме осигуравамо да је тренутна вредност `a` мања или једнака вредности `b`. Након тога, тренутну вредност променљиве `a` (то је мања од оригиналних вредности `a` и `b`) упоређујемо и са вредношћу `c` и само ако је `c` мања од ње, размењујемо их. Тиме је осигурано да тренутна вредност променљиве `a` буде мања или једнака тренутним вредностима променљивих `b` и `c`, при чему ниједна од вредности није изгубљена јер су све време коришћене само размене. На крају, пореде се вредности `b` и `c`, и само ако је `c` мања од вредности `b`, оне се размењују, чиме се постиже да су све три променљиве сортиране. Дакле овај поступак се може имплементирати на следећи начин (после сваког корака наведен је услов за који сигурно знамо да у том тренутку важи).

```
if a > b:
  razmeni a i b
#### a <= b
if a > c:
  razmeni a i c
#### a <= b i a <= c
if b > c:
  razmeni b i c
#### a <= b i a <= c i b <= c
```

Овај алгоритам сортирања назива се *сортӣрање избором најмањеī елемен̄та* (енгл. *selection sort*).

Сортирање уметањем

Сортирање уметањем заснива се на идеји да се елементи један по један умећу у сортирани префикс низа. Први елемент `a` сигурно представља сортирани једночлани низ. Да бисмо обезбедили да прва два елемента представљају сортиран низ, потребно је да заменимо `a` и `b` ако је `b` мање од `a`. Када су `a` и `b` исправно сортирани, тада елемент `c` треба убацити на његово место. Он се прво пореди са елементом `b` и ако је већи или једнак од њега, три елемента су већ сортирана како треба. У супротном, размењујемо `b` и `c`. Након тога, потребно је још проверити да ли је `b` сада можда поново мањи од `a` и ако јесте, разменити `a` и `b`. Дакле овај поступак се може имплементирати на следећи начин (после сваког корака наведен је услов за који сигурно знамо да у том тренутку важи).

```
if b < a:
  a, b = b, a # razmeni a i b
#### a <= b

if c < b:
  b, c = c, b # razmeni b i c
  # b <= c, a <= c

  if b < a:
```

```
    a, b = b, a # razmeni a i b
#### a <= b, b <= c, a <= c
```

Овај алгоритам сортирања назива се *сортирање уметањем* (енгл. *insertion sort*).

Сортирање низа библиотечком функцијом

Најједноставнији начин да се три броја сортирају је да се они сместе у низ и да се примени библиотечка функција за сортирање елемената низа. О низовима и њиховом коришћењу биће више речи у каснијим поглављима ове збирке.

У језику Пајтон листу `a` можемо да сортирамо тако што пишемо `a.sort()`. На пример, следећи програм исписује `2 3 5 8`:

```
a = [3, 8, 5, 2]
a.sort()
print(a[0], a[1], a[2], a[3])
```

Сортирани низ можемо да добијемо и пишући `b = sorted(a)`. Функција `sorted` за дати низ `a` враћа низ у коме су вредности из низа `a` уређене неопадајуће. Када унапред знамо тачан број елемената низа, вредност коју враћа функција `sorted` можемо да сместимо и у појединачне променљиве. На пример, резултат `2 3 5 8` од малопре можемо да добијемо и овако:

```
a, b, c, d = sorted([3, 8, 5, 2])
print(a, b, c, d)
```

Задатак: Уреди три броја

Милица купује патике. Допала су јој се три пара. Напиши програм који исписује цене та три пара патика од најјефтинијих до најскупљих.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се три цела броја из интервала $[1000, 10000]$, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписују се бројеви уређени од најмањег до највећег.

Пример

Улаз	*Излаз*
2300	1800
1800	2300
2799	2799

Решење

У задатку се тражи да се три броја уреде (сортирају) по величини и то у неопадајући поредак (тако да ниједан наредни није мањи од претходног - нагласимо да два суседна елемента могу да буду једнака).

Сортирање можемо извршити селекцијом. Само сортирање је пожељно издвојити у засебну функцију (чиме се добија на прегледности програма, а та функција се може користити и у наредним програмима).

У језику Пајтон размену две променљиве `a` и `b` најједноставније можемо остварити вишеструком доделом `(a, b) = (b, a)` (или још једноставније `a, b = b, a`).

```
# uredjivanje selekcijom
def sortiraj3(a, b, c):
    if (a > b):
        (a, b) = (b, a)
    if (a > c):
        (a, c) = (c, a)
    if (b > c):
        (b, c) = (c, b)
    return (a, b, c)

# cene tri para patika
p1 = int(input())
p2 = int(input())
p3 = int(input())
```

```
(p1, p2, p3) = sortiraj3(p1, p2, p3)
print(p1, p2, p3, sep="\n")
```

Сортирање можемо извршити и уметањем.

```
# uredjivanje umetanjem
def sortiraj3(a, b, c):
    if (b < a):
        (a, b) = (b, a);
    if c < b:
        (b, c) = (c, b)
    if (b < a):
        (a, b) = (b, a)
    return (a, b, c)

# cene tri para patika
p1 = int(input())
p2 = int(input())
p3 = int(input())
(p1, p2, p3) = sortiraj3(p1, p2, p3)
print(p1, p2, p3, sep="\n")
```

Најједноставнији начин да се три броја сортирају је да се они упамте у низ и да се примени библиотечка функција за сортирање елемената низа.

```
# cene tri para patika
p1 = int(input())
p2 = int(input())
p3 = int(input())
[p1, p2, p3] = sorted([p1, p2, p3])
print(p1, p2, p3, sep='\n')
```

Задатак: Најлошији контролни

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Сортирање

Задатак можемо решити тако што сортирамо све оцене неопадајуће и израчунамо просек свих елемената сортираног низа оцена осим првог (то је оцена на најлошије урађеном контролном). Начини сортирања мале серије елемената описани су у задатку Уреди три броја.
Најједноставније је да се бројеви сместе у низ и да се употреби библиотечка функција. У језику Пајтон се за сортирање се може употребити метода `sort` која сортира листу на којој је позвана или функција `sorted` која враћа нову листу која се добија сортирањем листе која је наведена као аргумент.

```
# ulazni podaci i njihovo učitavanje
ocene = [int(input()), int(input()), int(input()),
         int(input()), int(input())]
# sortiramo ocene
ocene = sorted(ocene)
# izračunavamo ocena prosek bez najlošije ocene
prosek_bez_najlosije = (ocene[1] + ocene[2] + ocene[3] + ocene[4]) / 4
# prikaz rezultata
print(format(prosek_bez_najlosije, '.2f'))
```

Задатак: Подела бројевне праве на интервале

Бројевна права је трима различитим тачкама a, b и c подељена на четири дела. Написати програм који одређује у ком делу, првом, другом, трећем или четвртом, се налази унета (четврта) тачка x, различита од тачака

a, b и c.

Улаз: На стандарном улазу налазе се 4 различита реална броја, сваки у посебној линији, који редом представљају тачке којима је реалне праве подељена (тачке a, b и c) и тачку за коју одређујемо у ком делу се налази (тачку x).

Излаз: У једној линији стандардног излаза исписује број 1, 2, 3 или 4 у зависности ком делу тачка x припада.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 -6 3 1	2

Решење

Редослед интервала на које је бројевна права подељена тачкама a, b, c зависи од њиховог распореда. Постоји 6 могућих распореда деоних тачака ($a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$). За сваку од тих могућности имамо 4 интервала на које је бројевна права подељена. Овакавим приступом решењу задатка имамо да разматрамо 24 могућа интервала, па врло лако можемо неки случај пропустити, а чак и да га не пропустимо, решење је веома ружно.

Једноставније и лепше је да изаберемо један од 6 могућих распореда тачака a, b, c и уредимо их тако да тај изабрани распоред важи. Размотримо случај кад уредимо тачке тако да је $a < b < c$ (поступци уређивања тј. сортирања три броја описани су у задатку Уреди три броја). После таквог уређења деоних тачака бројевна права је подељена редом на интервале $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c) и $(c, +\infty)$. Дакле, тачка x припада овим интервалима ако у првом случају важи $x < a$, у другом $a < x < b$, у трећем $b < x < c$ и у четвртом $x > c$. Ово се може остварити конструкцијом `else-if` како је објашњено у задатку Агрегатно стање.

```
# Funkcija za sortiranje 3 cela broja a, b, c u neopadajucem poretku
# a <= b <= c
def sortiraj3(a, b, c):
    if a > b:
        (a, b) = (b, a)
    if a > c:
        (a, c) = (c, a)
    if b > c:
        (b, c) = (c, b)
    return (a, b, c)

# ucitavamo tri tacke podele
a = float(input()); b = float(input()); c = float(input())
# ucitavamo cetvrtu tacku
x = float(input())
# sortiramo tacke podele
(a, b, c) = sortiraj3(a, b, c);
# odredjujemo i ispisujemo interval kome tacka pripada
if x < a:
   print(1)
elif x < b:
   print(2)
elif x < c:
   print(3)
else:
   print(4)
```

Задатак: Најмањи троцифрени број

Од цифара четвороцифреног природног броја треба формирати најмањи троцифрен број.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се четвороцифрен природан број n ($1000 \leq n < 10000$).

Излаз: Најмањи троцифрен број добијен од цифара броја n.

Пример

Улаз	*Излаз*
5302	203

Решење

Из датог четвороцифреног броја n издвојимо цифру јединица c_0, десетица c_1, стотина c_2 и хиљада c_3. Цифре издвајамо на уобичајени начин, на пример, одређивањем остатка при дељењу са 10 количника $\frac{n}{10^i}$ (види задатак Збир цифара четвороцифреног броја). Број n је четвороцифрен, па при издавајању цифре хиљада није неопходно одређивати остатак при дељењу са 10.

Издвојене цифре уредимо од најмање до највеће тако да је $c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3$ (уређивање можемо извршити модификацијом неког од поступака приказаних у задатку Уреди три броја). Од три најмање цифре формирамо троцифрен број $c_0 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_2$ тако што за цифру стотина узмемо цифру c_0, за цифру десетица цифру c_1, а за цифру јединица c_2. При томе морамо водити рачуна да би број био троцифрен цифра стотина мора бити различита од 0. Приликом формирања троцифреног броја за цифру стотина узимамо најмању цифру која је различита од 0, а за цифру десетица и цифру јединица две најмање од преосталих цифара.

```
# funkcija za uredjivanje 4 cela broja a, b, c, d
# u neopadajuci poredak a <= b <= c <= d
def sortiraj4(a, b, c, d):
    if a > b:
        (a, b) = (b, a)
    if a > c:
        (a, c) = (c, a)
    if a > d:
        (a, d) = (d, a)
    if b > c:
        (b, c) = (c, b)
    if b > d:
        (b, d) = (d, b)
    if c > d:
        (c, d) = (d, c)
    return (a, b, c, d)

# funkcija za kreiranje trocifrenog broja abc
def trocifreni_broj(a, b, c):
    return 100 * a + 10 * b + c

# citanje broja
broj = int(input())
# odredjivanje cifra broja
c0 = broj % 10
c1 = broj // 10 % 10
c2 = broj // 100 % 10
c3 = broj // 1000
# uredjivanje cifara tako da je c0 <= c1 <= c2 <= c3
(c0, c1, c2, c3) = sortiraj4(c0, c1, c2, c3);
# formiranje i ispis najmanjeg trocifrenog broja
if c0 != 0:
    x = trocifreni_broj(c0, c1, c2)
elif c1 != 0:
    x = trocifreni_broj(c1, c0, c2)
elif c2 != 0:
    x = trocifreni_broj(c2, c0, c1)
else:
    x = trocifreni_broj(c3, c0, c1)
print(x)
```

Задатак: Једнакокраки од 4 дужи

Дата су четири позитивна реална броја који представљају дужине 4 дужи. Напиши програм који испитује да ли се од неке 3 од њих може направити једнакокраки троугао.

Улаз: Четири позитивна реална броја (сваки у засебном реду).

Излаз: Једна линија текста у којој пише `da` ако је могуће направити троугао тј. `ne` ако није.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`1.1`	`ne`	`3.2`	`da`	`3.2`	`ne`
`2.2`		`2.3`		`2.3`	
`3.3`		`3.2`		`1.1`	
`4.4`		`4.5`		`1.1`	

Решење

Да би три позитивна броја могла да представљају дужине страница једнакокраког троугла потребно и довољно је да су (бар) две од њих једнаке и да ти бројеви задовољавају неједнакост троугла (да је збир сваке две странице већи од треће) описану у задатку Постоји ли троугао датих дужина страница.

Да би тај троугао био једнакокраки, бар две од те три дужи морају бити једнаке дужине. Задатак, дакле, можемо решити тако што дефинишемо функцију која проверава да ли три броја могу чинити дужине страница једнакокраког троугла, а затим можемо применити ту функцију на испробавање свих могућих тројки дужи (на тројке (d_1, d_2, d_3), (d_1, d_2, d_4), (d_1, d_3, d_4) и (d_2, d_3, d_4)). Ипак, овакво решење би било неефикасно када би се уопштило на већи број датих дужи (јер би број тројки које потенцијално требало испитати био веома велики).

```
# provera da li se od tri duzi duzina a, b i c moze napraviti trougao
def moze_trougao(a, b, c):
    return a + b > c and a + c > b and b + c > a

# provera da li se od tri duzi duzina a, b i c moze napraviti
# jednakokraki trougao
def moze_jednakokraki_trougao(a, b, c):
    return moze_trougao(a, b, c) and (a == b or a == c or b == c)

# ucitavamo duzine duzi
duz1 = float(input())
duz2 = float(input())
duz3 = float(input())
duz4 = float(input())
# proveravamo sve trojke
if moze_jednakokraki_trougao(duz1, duz2, duz3) or \
   moze_jednakokraki_trougao(duz1, duz2, duz4) or \
   moze_jednakokraki_trougao(duz1, duz3, duz4) or \
   moze_jednakokraki_trougao(duz2, duz3, duz4):
   print("da")
else:
   print("ne")
```

Решење засновано на сортирању

Задатак се ефикасније решава ако четири броја уредимо по величини, јер ће се тада два иста броја бројa наћи један до другог (довољно је упоредити само суседне вредности у уређеном редоследу). Ако су сви бројеви различити, тада сигурно није могуће направити једнакокраки троугао. Зато претпоставимо да постоје два једнака броја (рецимо a и b, тако да је $a = b$).

Ако то нису два најмања броја тј. ако постоји број мањи од њих (рецимо c, тако да је $c < a$) тада они сигурно задовољавају све потребне неједнакости троугла. Заиста, пошто је $b > 0$ важи да је $a + b > a > c$, пошто је $c > 0$ важи да је $a + c > a = b$ и $b + c > b = a$.

Са друге стране, ако су a и b најмањи међу датим бројевима, тада је додатно потребно проверити једну неједнакост троугла. Нека су c и d преостала два броја и нека је c мањи од њих тј. нека важи да је $c > a$ и

$c < d$. Пошто је $c > 0$ важи да је $a + c > a = b$, да је $b + c > b = a$, међутим, услов да је $a + b > c$ не мора да важи и треба га додатно проверити. Ако он важи онда се од дужи a, b и c може направити једнакокраки троугао. Ако не важи, тј. ако је $a+b \leq c$ онда се од њих не може оформити троугао, али се не може оформити ни од a, b и d јер је $a + b \leq c < d$.

Поступак уређивања тј. сортирања бројева описали смо у задатку Уреди три броја. Ако вредности чувамо у низу од четири елемента, тада сортирање можемо урадити коришћењем библиотечке функције.

```
# ucitavamo 4 duzine duzi
duzi = [float(input()), float(input()), float(input()), float(input())]
duzi = sorted(duzi)
# proveravamo da li je moguce napraviti jednakokraki trougao
if ((duzi[0] == duzi[1] and duzi[0] + duzi[1] > duzi[2]) or
     duzi[1] == duzi[2] or
     duzi[2] == duzi[3]):
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Задатак: Прозор и кутија

Петар и Лука треба да изнесу кутију облика квадра датих димензија a, b, c, кроз прозор облика правоугаоника димензија $p \times q$ тако да су одговарајуће ивице кутије буду паралелне ивицама прозора. Написати програм којим се проверава да ли је то могуће.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се 5 природних бројева који представљају редом димензије кутије a, b, c и прозора p, q изражене у центиметрима.

Излаз: У једној линији стандардног излаза приказати реч `da` ако је могуће кутију изнети кроз прозор, а реч `ne` ако то није могуће.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
75	da
30	
50	
70	
60	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
30	da
40	
50	
30	
40	

Решење

Испитивање свих могућности

Проверу да ли кутија може да прође кроз прозор можемо урадити испитивањем свих могућих окретања кутије. Укупно имамо 6 могућих окретања и за свако треба проверити да ли кутија може да прође кроз прозор. Проверу када кутију окренемо тако да су ивице кутије a и b редом паралелне са ивицама прозора p и q вршимо упоређивањем дужина ивица, ако је $p > a$ и $q > b$ онда кутија може да прође кроз прозор. Тако проверимо за сва окретања и ако може бар једним окретањем да прође кутија кроз прозор одговор је `da`, у супротном је `ne`. Дакле, могуће је испитати један сложени логички израз у коме су услови који одговарају сваком од 6 могућих окретања повезани оператором дисјункције (везником *или*), док се свака два унутрашња поређења повезују оператором конјункције (везником *и*).

```
# ucitavamo dimenzije kutije
a = int(input()); b = int(input()); c = int(input())
# ucitavamo dimenzije prozora
p = int(input()); q = int(input())
# proveravamo sve moguce nacine da kutija prodje kroz prozor
if (p >= a and q >= b) or (p >= a and q >= c) or\
   (p >= b and q >= a) or (p >= b and q >= c) or\
   (p >= c and q >= a) or (p >= c and q >= b):
   print(”da”)
else:
   print(”ne”)
```

Сортирање дужина ивица

Задатак можемо решити и на следећи начин. Ако уредимо дужине ивица кутије тако да је $a \leq b \leq c$ и дужине ивица прозора тако да је $p \leq q$ (поступке сортирања малих скупова бројева описали смо у задатку Уреди три броја). Кутија може да прође кроз прозор ако и само ако је $p > a$ и $q > b$. Заиста, ако овај услов није испуњен, онда је $p \leq a$ или $q \leq b$, а због уређености дужина ивица је онда $p \leq a \leq b$ или $p \leq q \leq b$, па не може бити испуњено $p > b$ и $q > a$. Слично, кутија не може да прође кроз прозор ни на неки од преосталих начина, јер је трећа ивица c већа или једнака од ивица a и b, па ако не могу да прођу ивице a или b онда сигурно не може ни ивица c.

У случају да имамо проблем већих димензија ово решење је значајно ефикасније од поређења ивица у разним редоследима.

Сортирање можемо постићи коришћењем низа и библиотечке функције.

```
# ucitavamo i sortiramo dimenzije kutije
a = [int(input()), int(input()), int(input())]
a = sorted(a)
# ucitavamo i sortiramo dimenzije prozora
p = [int(input()), int(input())]
p = sorted(p)
# proveravamo da li kutija moze da prodje (optimalno okrenuta)
if a[0] <= p[0] and a[1] <= p[1]:
   print(”da”)
else:
   print(”ne”)
```

Сортирање можемо постићи и имплементацијом сортирања три променљиве селекцијом или уметањем.

Задатак: Сумо рвачи

Четири сумо рвача познатих тежина чекају испред лифта познате носивости. Колики је најмањи број вожњи потребан да би се они превезли?

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 5 целих бројева, сваки у посебном реду:

- a, b, c, d ($100 \leq a, b, c, d, \leq 200$) - тежине, у килограмима, 4 сумо рвача,
- L ($200 \leq L \leq 700$) - носивост лифта у килограмима.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - број вожњи потребних да се рвачи превезу.

Пример

Улаз	*Излаз*
200 103 160 154 280	3

Решење

По претпоставци задатака сигурно је да лифт увек може да превезе сваког рвача посебно (зато што они имају до 200 килограма, а лифт може да носи бар 200 килограма).

Груба сила

Решење се може извести грубом силом, тј. анализирањем свих могућности. Једини начин да се сви превезу одједном је да је њихова укупна тежина мања или једнака носивости лифта тј. да важи да је $a+b+c+d \leq L$.

Ако то није могуће, постоји седам могућности да се превезу у две вожње:

- могуће је да се у једном лифту возе рвач a и рвач b, а у другом рвач c и рвач d (тада мора да важи да је $a + b \leq L$ и да је $c + d \leq L$),
- могуће је да се возе a и c, а затим b и d (тада мора да важи да је $a + c \leq L$ и да је $b + d \leq L$),
- могуће је да се возе a и d, а затим b и c (тада мора да важи да је $a + d \leq L$ и да је $b + c \leq L$),

- могуће је да се возе рвачи a, b и c, у једном лифту, а затим рвач d у наредном (тада мора да важи да је $a+b+c \leq L$ и да је $d \leq L$, што сигурно важи по претпоставци задатка),
- могуће је да се возе рвачи a, b и d, у једном лифту, а затим рвач c у наредном (тада мора да важи да је $a+b+d \leq L$ и да је $c \leq L$, што сигурно важи по претпоставци задатка),
- могуће је да се возе рвачи a, c и d, у једном лифту, а затим рвач b у наредном (тада мора да важи да је $a+c+d \leq L$ и да је $b \leq L$, што сигурно важи по претпоставци задатка),
- могуће је да се возе рвачи b, c и d, у једном лифту, а затим рвач a у наредном (тада мора да важи да је $b+c+d \leq L$ и да је $a \leq L$, што сигурно важи по претпоставци задатка).

Ако ништа од тога није могуће, постоји шест могућности да се превезу у три вожње:

- могуће је да се возе рвачи a и b, затим сам рвач c и на крају сам рвач d (тада мора да важи да је $a+b \leq L$, $c \leq L$ и $d \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).
- могуће је да се возе рвачи a и c, затим сам рвач b и на крају сам рвач d (тада мора да важи да је $a+c \leq L$, $b \leq L$ и $d \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).
- могуће је да се возе рвачи a и d, затим сам рвач b и на крају сам рвач c (тада мора да важи да је $a+d \leq L$, $b \leq L$ и $c \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).
- могуће је да се возе рвачи b и c, затим сам рвач a и на крају сам рвач d (тада мора да важи да је $b+c \leq L$, $a \leq L$ и $d \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).
- могуће је да се возе рвачи b и d, затим сам рвач a и на крају сам рвач c (тада мора да важи да је $b+d \leq L$, $a \leq L$ и $c \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).
- могуће је да се возе рвачи c и d, затим сам рвач a и на крају сам рвач b (тада мора да важи да је $c+d \leq L$, $a \leq L$ и $b \leq L$, при чему последња два услова сигурно важе по претпоставци задатка).

На крају, ако ништа од овог није могуће, по претпоставци задатка је сигурно могуће да се превезу у четири вожње, тако да се свако вози сам (јер сигурно важи да је $a \leq L$, $b \leq L$, $c \leq L$ и $d \leq L$).

```
# tezine 4 sumo rvaca
a = int(input()); b = int(input()); c = int(input()); d = int(input())
# nosivost lifta
L = int(input())

# izracunavamo broj voznji
if a+b+c+d <= L:
    broj_voznji = 1;
elif ((a+b <= L and c+d <= L) or
      (a+c <= L and b+d <= L) or
      (a+d <= L and b+c <= L) or
      a+b+c <= L or a+b+d <= L or a+c+d <= L or b+c+d <= L):
    broj_voznji = 2;
elif (a+b <= L or a+c <= L or a+d <= L or
      b+c <= L or b+d <= L or c+d <= L):
    broj_voznji = 3;
else:
    broj_voznji = 4;

# ispisujemo rezultat
print(broj_voznji)
```

Сортирање

Елегантно решење може се добити ако се претпостави да су тежине рвача сортиране, тако да је $a \geq b \geq c \geq d$.

Поново, једна вожња је могућа само ако важи $a+b+c+d \leq L$.

Ако то није могуће онда су две вожње могуће ако и само ако важи да је $a+d \leq L$ и $b+c \leq L$ или ако важи да је $b+c+d \leq L$ и то су услови које је довољно проверити. Заиста, ако нека три рвача стају у један лифт, онда сигурно стају и три најлакша (тј. ако важи да је $a+b+c \leq L$ или је $a+b+d \leq L$ или је $a+c+d \leq L$ тада је сигурно и $b+c+d \leq L$ па је довољно проверити само тај услов). Ако су могуће неке две вожње са по два сумо рвача, онда је сигурно могуће да се возе најлакши и најтежи и средња два. Ако би важило да је $a+b \leq L$, тада би сигурно важило и да је $a+d \leq L$ (пошто из $b \geq d$ следи да је $a+d \leq a+b \leq L$) и да је $b+c \leq L$ (пошто из $a \geq c$ следи да је $b+c \leq b+a = a+b \leq L$). Слично, ако би важило да је $a+c \leq L$,

тада би важило и да је $a + d \leq L$ (јер из $c \geq d$ следи да је $a + d \leq a + c \leq L$) и да је $b + c \leq L$ (јер из $a \geq b$ следи да је $b + c \leq a + c \leq L$).

Ако две вожње нису могуће, три вожње су могуће ако и само ако важи да је $c+d \leq L$ и то је једини услов који треба проверити. Наиме, ако могу нека два рвача да стану у лифт, тада сигурно могу да стану два најлакша (на пример, ако би важило да је $b + c \leq L$, тада би из $b \geq d$ следило да је $c + d = d + c \leq b + c \leq L$).

Остаје још питање како технички реализовати сортирање тежина (разни начини сортирања неколико бројева описани су у задатку Уреди три броја). Сортирање можемо урадити размена вредности променљивих.

```
# sortiranje 4 broja nerastuce, tako da je a >= b >= c >= d
def sortiraj4(a, b, c, d):
    if (a < b):
        (a, b) = (b, a)
    if (a < c):
        (a, c) = (c, a)
    if (a < d):
        (a, d) = (d, a)
    if (b < c):
        (b, c) = (c, b)
    if (b < d):
        (b, d) = (d, b)
    if (c < d):
        (c, d) = (d, c)
    return (a, b, c, d)

# tezine 4 sumo rvaca
a = int(input()); b = int(input()); c = int(input()); d = int(input())
# nosivost lifta
L = int(input())
# sortiramo tezine nerastuce
(a, b, c, d) = sortiraj4(a, b, c, d)
# izracunavamo broj voznji
if a + b + c + d <= L:
    broj_voznji = 1
elif (a + d <= L and b + c <= L) or b + c + d <= L:
    broj_voznji = 2
elif c + d <= L:
    broj_voznji = 3
else:
   broj_voznji = 4
# ispisujemo rezultat
print(broj_voznji)
```

Сортирање се може извршити и тако што се бројеви сместе у низ и да се позове библиотечка функција сортирања.

```
rvaci = [int(input()), int(input()), int(input()), int(input())]
L = int(input())

# sortiramo tezine rvaca opadajuce
d, c, b, a = sorted(rvaci)

# izracunavamo broj voznji
if a + b + c + d <= L:
    broj_voznji = 1
elif (a + d <= L and b + c <= L) or \
     b + c + d <= L:
    broj_voznji = 2;
elif c + d <= L:
    broj_voznji = 3;
```

```
else:
    broj_voznji = 4;

# ispisujemo rezultat
print(broj_voznji)
```

Задатак: Најјефтинији за динар

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Први и други максимум

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Најбољи такмичари

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Оријентација троугла

У равни има пуно тачака и свака од њих има свој редни број (од 1 до n). Троугао је одређен са три тачке, које су одређене својим редним бројевима. Међутим, проблем је то што су приликом записивања троугла тачке задате у произвољном редоследу. На пример, троугао $A_3A_5A_9$ може уместо тачака у редоследу A_3, A_5 и A_9, бити задат тако што су записане тачке A_5, A_9 и на крају A_3. Напиши програм који ће тачке унетог троугла исписати у основном редоследу (од најмањег броја, до највећег) и уз то одредити да ли распоред тачака који је унет одређује троугао који има исту или супротну оријентацију од овог добијеног уређивањем тачака. На пример, троуглови $A_3A_5A_9$ и $A_9A_3A_5$ имају међусобно исту оријентацију, док троугао $A_5A_3A_9$ има супротну оријентацију у односу на њих.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три различита природна броја, раздвојена размаком, који представљају редне бројеве тачака.

Излаз: На стандардни излаз исписати три броја раздвојена размаком који се добијају уређивањем бројева тачака од најмањег до највећег, а у наредном реду исписати `isto` ако полазни распоред одређује исту тј. `suprotno` ако одређује супротну оријентацију од оног добијеног уређивањем.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`32 14 55`	`14 32 55` `suprotno`

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`11 5 8`	`5 8 11` `isto`

4.1.6 Позициони запис - вредност и цифре

Раније смо се већ упознали са основним дефиницијама позиционог записа и видели смо да су две основне операције израчунавање вредности броја на основу познатих цифара и израчунавање цифара датог броја.

Цифре у запису броја x у основи b се могу добити тако што се примењује низ корака таквих да се у сваком кораку одређује и брише цифра јединица броја. Обратимо пажњу на то да се у овом итеративном поступку број коме се одређују цифре стално мења. Цифру c_0 у запису броја $x = c_n \cdot b^n + \ldots c_1 \cdot b + c_0$ можемо одредити као $x \bmod b$, а важи да је $x \operatorname{div} b = c_n \cdot b^{n-1} + \ldots + c_2 \cdot b + c_1$. Ако се сада број x замени вредношћу $x \operatorname{div} b$, цифру c_1 добијамо као остатак при дељењу са b, док је количник при дељењу са b једнак $c_n b^{n-2} + \ldots + c_3 \cdot b + c_2$. Када се поступак настави на потпуно исти начин, можемо издвојити цифру c_2, затим c_3 и тако даље. Цифре, дакле, добијамо поступком наредног облика.

```
c0 = x % b; x = x // b
c1 = x % b; x = x // b
...
```

Вредност броја се најједноставније одређује Хорнеровом схемом, кренувши од цифре највеће тежине, па уназад до цифара јединица. Подсетимо се, по Хорнеровој схеми вредност броја једнака је $(\ldots((c_n \cdot b + c_{n-1}) \cdot b + c_{n-2}) \cdot b + \ldots + c_1) \cdot b + c_0$. У итеративном поступку вредност иницијализујемо на нулу, а затим је у сваком кораку множимо основом b и додајемо наредну цифру. Вредност, дакле, одређујемо итеративним поступком наредног облика.

```
x = 0
x = x * b + c[n]
x = x * b + c[n-1]
...
x = x * b + c[0]
```

Приметимо и да је број могао бити иницијализован на вредност c_n након чега би се до резултата стизало у једном кораку мање.

Индукцијом се лако може доказати да је након k корака вредност променљиве x једнака броју $(c_n \ldots c_{n-k+1})_b$ који се добија од првих k цифара тј. $c_n \cdot b^{k-1} + c_{n-1} \cdot b^{k-2} + \ldots + c_{n-k+1}$.

На пример, за вредности цифара 1, 2 и 3, променљива `x` имаће редом вредности $0, 1, 12, 123$.

Итеративни поступак у ком вредност одређујемо на основу вредности цифара кренувши од цифре најмање тежине захтева да се поред вредности броја одржава и тежина наредне цифре, тј. текући степен основе (њега иницијализујемо на 1 и множимо га основом у сваком кораку).

```
x = 0; tezina = 1
x = x + tezina * c[0]; tezina = tezina * b
x = x + tezina * c[1]; tezina = tezina * b
...
```

Индукцијом се лако може доказати да ће након k корака променљива `x` имати вредност једнаку броју $(c_{k-1} \ldots c_0)_b$ који се добије од последњих k цифара, док ће променљива `tezina` имати вредност 10^k.

На пример, за вредности цифара 1, 2 и 3, променљива `x` имаће редом вредности $0, 3, 23, 123$.

Приметимо да Хорнерова шема не захтева израчунавање степена основе, што је за дуже бројеве чини ефикаснијом од класичног поступка.

Задатак: Збир цифара четвороцифреног броја

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Цифре можемо одредити и итеративним поступком. На пример, ако кренемо од броја 1234, прву цифру 4 одређујемо као остатак при дељењу броја са 10, а број затим мењамо његовим целобројним количником при дељењу са 10, тј. бројем 123. Наредну цифру 3 одређујемо као остатак при дељењу тог броја са 10, а број затим мењамо његовим целобројним количником при дељењу са 10, тј. бројем 12. Наредну цифру 2 одређујемо као остатак при дељењу тог броја са 10, а број затим мењамо његовим целобројним количником при дељењу са 10, тј. бројем 1. То је уједно и последња цифра броја (а она је такође једнака остатку при дељењу тог броја са 10).

```
# učitavanje polaznog broja
broj = int(input())
# izdvajanje cifara
cifra_jedinica = broj % 10; broj = broj // 10
cifra_desetica = broj % 10; broj = broj // 10
cifra_stotina  = broj % 10; broj = broj // 10
cifra_hiljada  = broj
# izračunavanje zbira
zbir_cifara = cifra_jedinica + cifra_desetica + \
              cifra_stotina + cifra_hiljada
# prikaz rezultata
print(zbir_cifara)
```

Задатак: Октални бројеви

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Задатак се може решити итеративним поступцима. Одређивање вредности броја на основу цифара се може засновати на Хорнеровој шеми (тада број израчунавамо као $((c_3 \cdot 8 + c_2) \cdot 8 + c_1) \cdot 8 + c_0$). Одређивање цифара се може извршити тако што се понавља низ корака у коме се наредна цифра израчунава као целобројни остатак при дељењу са 8) и уклања из броја, заменом броја његовим целобројним количником при дељењу са 8. Поново приликом имплементације можемо дефинисати и користити функцију која на основу броја одређује цифре (она враћа више вредности преко излазних параметара) и функцију која на основу цифара одређује вредност броја.

```
# odredjivanje vrednosti oktalnog zapisa (c3c2c1c0)8
def iz_oktalnog(c3, c2, c1, c0):
    n = 0
    n = 8 * n + c3
    n = 8 * n + c2
    n = 8 * n + c1
    n = 8 * n + c0
    return n

# prevodjenje broja n u oktalni zapis (c3c2c1c0)8
def u_oktalni(n):
    c0 = n % 8; n //= 8;
    c1 = n % 8; n //= 8;
    c2 = n % 8; n //= 8;
    c3 = n;
    return (c3, c2, c1, c0)

# izracunavanje vrednosti oktalno zapisanog broja
c3 = int(input())
c2 = int(input())
c1 = int(input())
c0 = int(input())
print(iz_oktalnog(c3, c2, c1, c0))

# izracunavanje cifara broja koji treba zapisati oktalno
n = int(input())
(c3, c2, c1, c0) =  u_oktalni(n)
print(c3, c2, c1, c0, sep="")
```

Задатак: UNIX време

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Конверзија у милисекунде може да тече Хорнеровом схемом тако што се резултујућа променљива иницијализује на број дана, а затим се редом множи за 24 и увећава за број сати (тиме се добије укупан број сати), затим се множи са 60 и увећава за број минута (тиме се добија укупан број минута), затим се множи са 60 и увећава за број секунди (тиме се добија укупан број секунди) и на крају се множи са 1000 и увећава за број милисекунди (и тако се добија тражени број милисекунди).

Конверзија од милисекунди тече тако што се итеративно одређује остатак и целобројни количник при дељењу редом са 1000, 60, 60 и 24, слично техници коју смо приказали у задатку Поноћ. Заиста, ово следи директно из услова да је $0 \leq mili < 1000$, $0 \leq sek < 60$, $0 \leq min < 60$, $0 \leq sat < 24$ и дефиниције количника и остатка при дељењу коју смо навели у задатку Разломак у мешовит број.

```
# prevodi broj dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi u broj
# milisekundi
def u_milisekunde(dan, sat, min, sek, mili):
    # Hornerova shema
    rez = dan
    rez = rez*24 + sat
    rez = rez*60 + min
    rez = rez*60 + sek
    rez = rez*1000 + mili
    return rez

# prevodi broj milisekundi u broj dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi
def od_milisekundi(v):
    mili = v % 1000; v = v // 1000
    sek = v % 60;    v = v // 60
    min = v % 60;    v = v // 60
    sat = v % 24;    v = v // 24
    dan = v
    return (dan, sat, min, sek, mili)

# pocetak pesme izrazen u broju dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi
# od ukljucivanja racunara
pocetak_dan = int(input())
pocetak_sat = int(input())
pocetak_min = int(input())
pocetak_sek = int(input())
pocetak_mili = int(input())
# trajanje pesme u milisekundama
trajanje = int(input())
# pocetak pesme izrazen u broju milisekundi od ukljucivanja racunara
pocetak = u_milisekunde(pocetak_dan, pocetak_sat,
                        pocetak_min, pocetak_sek, pocetak_mili)
# kraj pesme izrazen u broju milisekundi od ukljucivanja racunara
kraj = pocetak + trajanje
# kraj pesme izrazen u broju dana, sati, minuta, sekundi i milisekundi
(kraj_dan, kraj_sat, kraj_min, kraj_sek, kraj_mili) = od_milisekundi(kraj)
# ispis rezultata
print(kraj_dan, ":", kraj_sat, ":", kraj_min, ":",
      kraj_sek, ":", kraj_mili, sep="")
```

Задатак: Збир два троцифрена

Ђаци увежбавају сабирање троцифрених бројева. Учитељица диктира задатак редом цифру по цифру. Напиши програм који на основу учитаних цифара израчунава и исписује тражени збир.

Улаз: У шест линија стандардног улаза задато је шест цифара.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - тражени збир.

Пример

Улаз	*Излаз*
1 2 3 4 5 6	579

Решење

Кључни део решења може представљати алгоритам који на основу три цифре гради троцифрени број. Форми-

рање броја на основу његових цифара ради се или на основу класичне дефиниције позиционог записа броја или Хорнеровим поступком. Када се од цифара формирају бројеви (представљени целобројним променљивама), можемо их лако сабрати коришћењем оператора +. Сличну технику смо видели у задацима у којима смо време задато у сатима, минутима и секундима преводили у секунде, пре извођења аритметичких операција.

Класичан поступак

Ако цифре стотина, десетица и јединица означимо са c_2, c_1 и c_0 класичним поступком број добијамо изразом $c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0$. Да бисмо ово имплементирали потребно је да прво учитамо све три цифре (складиштимо их у три променљиве) и да онда израчунамо вредност броја.

Хорнеров поступак

Хорнеров поступак (каже се и Хорнерова шема) даје алтернативу чија је основна предност да, ако се цифре читају с лева надесно, тада се број може градити итеративно и није потребно истовремено памтити све цифре. Текућа вредност броја се иницијализује нулом, а затим се у сваком кораку учитава следећа цифра и она се дописује на текући број сдесна, тако што се број помножи са 10 и сабере са том цифром.

```
# funkcija ucitava trocifreni broj cija je svaka cifra u posebnom redu
def ucitaj_trocifreni_broj():
    broj = 0
    cifra = int(input())
    broj = 10*broj + cifra
    cifra = int(input())
    broj = 10*broj + cifra
    cifra = int(input())
    broj = 10*broj + cifra
    return broj

# ucitavamo i sabiramo dva trocifrena broja
broj1 = ucitaj_trocifreni_broj()
broj2 = ucitaj_trocifreni_broj()
print(broj1 + broj2)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Цифре сдесна

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Приказаћемо решење које неће прво учитавати све цифре, већ ће обрађивати цифру по цифру, редом којим пристижу. Број (памтићемо га у променљивој `broj`) иницијализујемо на нулу, и у сваком кораку учитавамо нову цифру и дописујемо је слеве стране тако што тренутну вредност броја саберемо са вредношћу цифре помножену одговарајућим тежинским фактором. У првом кораку тај фактор је 1, у наредном 10, затим 100, 1000, 10000 и на крају 100000.

Употребићемо променљиву `tezina` у којој се памти тренутна вредност тежинског фактора (текући степен основе). Променљиву `broj` ћемо ажурирати тако што ћемо је увећати за производ тренутно учитане цифре `cifra` и текуће вредности променљиве `tezina`. Променљиву `tezina` иницијализујемо на вредност 1 и на крају сваког корака ажурирамо множењем са 10.

```
# cifra - trenutna cifra,
# tezina - njena tezina
# broj - trenutna vrednost broja

# nakon k koraka broj je sastavljen od poslednjih k cifara trazenog broja
# a tezina ima vrednost 10^k
broj = 0
tezina = 1
# ucitavamo novu cifru i dodajemo je na broj sa njegove leve strane
```

```
cifra = int(input())
broj = broj + tezina * cifra
tezina = tezina * 10
# ucitavamo novu cifru i dodajemo je na broj sa njegove leve strane
cifra = int(input())
broj = broj + tezina * cifra
tezina = tezina * 10
# ...
# ispisujemo rezultat
print(broj)
```

У елементарној имплементацији коју приказујемо копирамо исти кôд 6 пута. Ствар је, наравно, могуће побољшати употребом петље или бар издвајањем корака у засебну функцију.

Функција ће учитавати цифру и имати два параметра `broj` и `tezina` који ће јој бити улазно-излазни (нови број и нова тежина израчунавају се на основу вредности учитане цифре, али и на основу старих вредности променљивих `broj` и `tezina`). У језику Пајтон функција ће примати две улазне вредности, а њихове ажуриране вредности ће враћати у облику уређеног пара.

```
def dodaj_cifru(tezina, broj):
    # ucitavamo novu cifru i dodajemo je na broj sa njegove leve strane
    cifra = int(input())
    broj = broj + tezina*cifra
    tezina = tezina * 10
    return (tezina, broj)

# tezina - trenutna tezina cifre
# broj - trenutna vrednost broja

# nakon k koraka broj je sastavljen od poslednjih k cifara trazenog broja
# a tezina ima vrednost 10^k
tezina = 1
broj = 0
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
(tezina, broj) = dodaj_cifru(tezina, broj)
print(broj)
```

Задатак: Избаци цифру

Напиши програм који одређује број добијен када се из датог троцифреног броја избацују сва појављивања његове цифре јединица.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси један троцифрени број.

Излаз: На стадардни излаз исписати тражени број.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**		**Пример 4**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
131	3	133	1	123	12	333	0

Решење

У решењу овог задатка комбинујемо поступак одређивања серије цифара броја, филтрирања те серије и изградње новог броја од резултујућих цифара (оних различитих од цифара јединице полазног броја).

Један могући начин је да прво одредимо све цифре и да их упамтимо у посебним променљивима. Цифре броја можемо одредити на стандардни начин, комбиновањем целобројног дељења степеновима броја 10 и одређивања остатка при дељењу са 10, како смо показали у задатку Збир цифара четвороцифреног броја. Након тога, резултат можемо најлакше изградити Хорнеровим поступком, тако што га иницијализујемо на

нулу, затим пролазимо кроз цифре оригиналног броја сдесна на лево и сваки пут када наиђемо на цифру која је различита од цифре јединице полазног броја додамо је на резулат на његову десну страну (тако што резултат помножимо са 10 и додамо му ту цифру), како смо показали у задатку Јарди, стопе и инчи.

```
# polazni broj
n = int(input())
# odredjujemo cifre polaznog broja
c0 = (n // 1) % 10
c1 = (n // 10) % 10
c2 = (n // 100) % 10
# Hornerovim postupkom gradimo rezultat, zadrzavajuci samo
# cifre razlicite od cifre jedinice
rezultat = 0
if (c2 != c0):
   rezultat = 10 * rezultat + c2
if (c1 != c0):
   rezultat = 10 * rezultat + c1
# naredni uslov sigurno nece biti ispunjen, pa se moze preskociti
# if (c0 != c0)
#   rezultat = 10*rezultat + c0;
# ispisujemo konacan rezultat
print(rezultat)
```

Уместо Хорнеровог поступка могућа је анализа различитих могућих случајева за вредности цифара стотина и десетица полазног броја, међутим, овакво решење је веома лоше (јер је случајева много, чак и за троцифрени број).

Ипак, поступак који је најпожељнији јер се, како ћемо касније видети, може лако уопштити и на бројеве са већим бројем цифара избегава потребу да се прво одреде све цифре, већ обрађује једну по једну цифру полазног броја, с десна на лево (јер је то редослед у коме можемо лакше одређивати цифре броја), истовремено је анализира и ако је потребно одмах дописује на текући резултат, овај пут са његове леве стране. Дакле, овде је потребно искористити алгоритам изградње броја сдесна на лево, који је описан у задатку Цифре сдесна. Променљиву `rezultat` иницијализујемо на вредност 0, `tezina` на вредност 1. У сваком кораку одређујемо последњу цифру полазног броја израчунавањем остатка при дељењу са 10 и одмах је уклањамо из полазног броја замењујући полазни број његовим целобројним количником са 10. Ако је текућа цифра (последња цифра текуће вредности полазног броја) различита од цифре која се избацује, тада је додајемо на резултат, претходно помножену вредношћу променљиве `tezina`, а променњиву `tezina` ажурирамо множећи је са 10. Поменути корак понављамо три пута (пошто знамо да је полазни број троцифрен).

```
# polazni broj
n = int(input())

# cifra jedinica polaznog broja
c0 = n % 10

# vrednost rezultata gradimo sdesna na levo
rezultat = 0
tezina = 1

# uklanjamo poslednju cifru tekuceg broja i ako je ona razlicita od
# cifre koja se izbacuje, dodajemo je na levu stranu rezultata
cifra = n % 10
n = n // 10
# naredni uslov sigurno nece biti ispunjen, pa se moze preskociti
# if cifra != c0:
#    rezultat = rezultat + cifra*tezina;
#    tezina = tezina * 10;
# uklanjamo poslednju cifru tekuceg broja i ako je ona razlicita od
# cifre koja se izbacuje, dodajemo je na levu stranu rezultata
```

```
cifra = n % 10
n = n // 10
if cifra != c0:
   rezultat = rezultat + cifra * tezina
   tezina = tezina * 10

# uklanjamo poslednju cifru tekuceg broja i ako je ona razlicita od
# cifre koja se izbacuje, dodajemo je na levu stranu rezultata
cifra = n % 10
n = n // 10
if cifra != c0:
   rezultat = rezultat + cifra * tezina
   tezina = tezina * 10

# ispisujemo konacan rezultat
print(rezultat)
```

Задатак: Бројање оваца

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Обрни цифре

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Поноћ

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Тајмер

Тајмер се у тренутку $h : m : s$ (h од 0 до 23, m и s од 0 до 59) наштима да звони након периода који се исказује са hh:mm:ss ($0 \leq hh, mm, ss \leq 1000$). Може се задати $100 : 100 : 100$ што је исто као да је задато $101 : 41 : 40$. Одредити када ће тајмер да звони у формату $h : m : s + dan$ (dan узима вредности почев од 0).

Улаз: Прво стартно време - у сваком реду по један податак: сат, минут и секунд. Затим трајање периода - у сваком реду по један податак: број сати, минута и секунди.

Излаз: Сат, минут, секунд и дан у формату h:m:s+dan.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
23	0:0:0+1
59	
59	
0	
0	
1	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
1	1:1:1+2
1	
1	
48	
0	
0	

4.1.7 Позициони запис - сабирање и одузимање

У наредних неколико задатака приказаћемо итеративне алгоритме за сабирање и одузмање бројева чије су цифре у неком позиционом запису познате, при чему је број цифара мали (бројеви су углавном двоцифрени или троцифрени). Исти ови алгоритми се примењују и на вишецифрене бројеве, међутим, тада се у имплементацији користе петље.

Задатак: Збир два троцифрена

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Друга група решења користи алгоритам сабирања позиционо записаних бројева, без формирања вредности појединачних сабирака (то је алгоритам који сабира бројеве потписане један испод другог, који се учи у нижим разредима основне школе).

Директно сабирање (без израчунавања вредности бројева)

Још један од начина да израчунамо збир је да уопште не израчунавамо вредности бројева, већ да сабирамо цифру по цифру, као што се то ради када се два броја сабирају потписивањем. Убичајени начин да то урадимо је да саберемо цифре јединица, затим цифре десетица и на крају цифре стотина. При том, збир две цифре може да буде и већи од 10 и тада је потребно извршити пренос на следећу позицију. Приметимо да гранање није неопходно, јер се цифра резултата може израчунати као остатак збира цифара при дељењу са 10, док се пренос може израчунати као целобројни количник тог збира при дељењу са 10. На крају, потребно је проверити да ли је остао пренос након сабирања цифара стотина, и ако јесте, тај пренос урачунати као цифру хиљада.

За пренос и збир цифара на текућој позицији могуће је употребити посебне променљиве. Да би се добио униформан кôд, понекад се пренос иницијализује нулом и урачунава се и у првом кораку.

```
# ucitavamo sve cifre
a2 = int(input()); a1 = int(input()); a0 = int(input())
b2 = int(input()); b1 = int(input()); b0 = int(input())

# sabiramo cifre odmah vrseci prenos
zbirCifara = a0 + b0
z0 = zbirCifara % 10
prenos = zbirCifara // 10

zbirCifara = a1 + b1 + prenos
z1 = zbirCifara % 10
prenos = zbirCifara // 10

zbirCifara = a2 + b2 + prenos
z2 = zbirCifara % 10
prenos = zbirCifara // 10

z3 = prenos

# ispisujemo rezultat bez vodecih nula
if z3 > 0:
    print(z3, z2, z1, z0, sep="")
elif z2 > 0:
    print(z2, z1, z0, sep="")
elif z1 > 0:
    print(z1, z0, sep="")
else:
    print(z0)
```

Друга могућа имплементација не користи посебне промењиве за текући збир и пренос, већ се и пренос и збир памте у истим промењивама које чувају цифре. Свака наредна промењива се иницијализује вредношћу преноса, да би се затим увећала за збир одговарајућих цифара.

```
# ucitavamo sve cifre
a2 = int(input()); a1 = int(input()); a0 = int(input())
b2 = int(input()); b1 = int(input()); b0 = int(input())
```

```
# sabiranje sa prenosom, bez posebne promenljive
z0 = a0 + b0
z1 = z0 // 10
z0 = z0 % 10
z1 = z1 + a1 + b1
z2 = z1 // 10
z1 = z1 % 10
z2 = z2 + a2 + b2
z3 = z2 // 10
z2 = z2 % 10

# ispisujemo rezultat bez vodecih nula
if z3 > 0:
    print(z3, z2, z1, z0, sep="")
elif z2 > 0:
    print(z2, z1, z0, sep="")
elif z1 > 0:
    print(z1, z0, sep="")
else:
    print(z0)
```

У другој варијанти имплементације алгоритма сабирања у првој фази би се израчунали сви збирови, занемарујући пренос (тада је потпуно небитно којим редом се цифре сабирају, док год се увек сабирају цифре на истим позицијама). У другој фази се врше поправке тако што се кренувши позиције од цифре јединица гледа да ли је цифра збира на тој позицији достигла или превазишла вредност основе (у овом случају 10) и тада се врши пренос тако што се та цифра замени вредношћу свог остатка при дељењу са основом, док се њој претходна цифра увећа за вредност количника цифре збира са основом (и тако изврши пренос). Ни у овој варијанти нису неопходне помоћне промењиве.

```
# ucitavamo sve cifre
a2 = int(input()); a1 = int(input()); a0 = int(input())
b2 = int(input()); b1 = int(input()); b0 = int(input())

# sabiramo cifre vrseci prenos u posebnoj fazi
z0 = a0 + b0
z1 = a1 + b1
z2 = a2 + b2

z1 = z1 + z0 // 10
z0 = z0 % 10
z2 = z2 + z1 // 10
z1 = z1 % 10
z3 = z2 // 10
z2 = z2 % 10

# ispisujemo rezultat bez vodecih nula
if z3 > 0:
    print(z3, z2, z1, z0, sep="")
elif z2 > 0:
    print(z2, z1, z0, sep="")
elif z1 > 0:
    print(z1, z0, sep="")
else:
    print(z0)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Време завршетка филма

Познати су сат, минут и секунд почетка филма и дужина трајања филма у секундама. Написати програм који одређује сат, минут и секунд завршетка филма.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се 4 природна броја (сваки у засебном реду). Прво сат, минут и секунд почетка филма, а затим дужина трајања филма у секундама.

Излаз: На стандрадни излаз се исписује један ред у коме су три броја (сат, минут и секунд) раздвојена двотачкама који представљају време завршетка филма.

Пример

Улаз	*Излаз*
23 15 22 4115	0:23:57

Решење

Време завршетка филма добијамо кад на време почетка филма додамо дужину трајања филма у секундама. Дакле, овај задатак подразумева сабирање два временска записа.

Директно сабирање позиционих записа

Један начин је да се сабирање ради директно, увећавањем броја секунди када филм почиње за дужину трајања филма. Добијени број секунди ће вероватно прећи 60, па је потребно пренети вишак минута и оставити број секунди такав да буде мањи од 60. Број минута који се преноси се може израчунати као целобројни количник увећаног броја секунди са 60, док је преостали број секунди остатак при дељењу увећаног броја секунди са 60. Након преноса минута, број минута ће вероватно прећи 60, па је потребно пренети вишак сати и оставити број минута таква да буде мањи од 60. Број сати који се преноси се може израчунати као целобројни количник увећаног броја минута са 60, док је преостали број минута остатак при дељењу увећаног броја минута са 60. Слично, и број сати може прећи 24 и тада је потребно пренети вишак сати (тиме бисмо добили увећан број дана, међутим њега занемарујемо).

У претходном алгоритму примењујемо поступак сабирања два позициона записа. Ово је један од класичних итеративних поступака. Алгоритам сабирања бројева датих својим цифрама у неком позиционом запису (тада са основом 10) детаљно је описан у задатку Збир два троцифрена. Пошто број сати мора бити у интервалу од 0 до 23, а број минута od 0 до 59, приметимо да се овде заправо ради са записима у мешовитој бројевној основи (прва основа је 24, а друга 60).

```
# ucitavamo vreme pocetka i duzinu filma
hPocetka = int(input()); mPocetka = int(input()); sPocetka = int(input())
duzina = int(input())
# dodajemo duzinu u sekundama na vreme pocetka
# vrseci prenos istovremeno sa sabiranjem
sZavrsetka = (sPocetka + duzina) % 60
prenos = (sPocetka + duzina) // 60
mZavrsetka = (mPocetka + prenos) % 60
prenos = (mPocetka + prenos) // 60
hZavrsetka = (hPocetka + prenos) % 24
# prenos broja dana se zanemaruje
# prenos = (hPocetka + prenos) // 24
# ispisujemo rezultat
print(hZavrsetka, ":", mZavrsetka, ":", sZavrsetka, sep="")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Тајмер

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Поноћ

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Трајање вожње

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

4.2 Основни алгоритми над серијама елемената

У претходном поглављу описали смо основне итеративне алгоритме у варијанти у којој су примењени на мале серије тако да су имплементирани без коришћења петљи. У овом поглављу ћемо исте алгоритме применити да дуже серије елемената (укључујући и серије чији број елемената није унапред познат). Предуслов за имплементацију таквих алгоритама је коришћење **петљи** (каже се и **циклуса**).

4.2.1 Елементи програмског језика

У језику Пајтон постоје две врсте петљи: `while` и `for`.

4.2.1.1 Петља `while`

Општи облик петље `while` је:

```
while uslov:
    telo
```

У петљи `while` испитује се вредност логичког израза `uslov` и уколико је он тачан, извршавају се наредбе задате унутар тела петље, које се пише увучено. Дакле, услов петље се први пут испитује пре извршавања тела петље. Када се тело изврши услов се поново испитује и поступак се понавља све док се први пут не деси да услов није испуњен. Свако извршавање тела петље називаћемо једном *итерацијом* петље.

4.2.1.2 Петља `for`

Општи облик петље `for` је:

```
for promenljiva in kolekcija:
    telo
```

Петља `for` се извршава тако што се промењљивој `promenljiva` (која се назива *контролна промењљива*) редом додељују вредности из колекције и за сваку од тих вредности се и извршавају наредбе које се налазе у телу петље.

Једна врста колекције која се често користи у `for` петљи је **опсег** (енгл. `range`). Опсег може да се зада помоћу једног, два или три параметра.

Опсег `range(n)` представља целе бројеве од 0 до `n`, не укључујући `n`. Тако следећи програм исписује бројеве 0, 1, 2, 3 (сваки у посебном реду).

```
for i in range(4):
    print(i)
```

Оваква врста петље се понекад назива и бројачка петља, нарочито ако се промењљива `i` не користи у телу петље (на пример, када је неку наредбу само потребно поновити одређени број пута). У следећем програму се помоћу петље "броји до 3" (тело петље се понавља 3 пута), због чега се петља и назива бројачком:

```
for i in range(3):
    print('Zdravo!')
```

Опсег `range(a, b)` представља целе бројеве од `a` до `b`, не укључујући `b`. Тако следећи програм исписује бројеве 2, 3, 4, 5 (сваки у посебном реду).

```
for i in range(2, 6):
    print(i)
```

Опсег `range(a, b, c)` представља бројеве од `a` до `b` са кораком `c`, не укључујући `b`. При томе корак може да буде и негативан. Тако следећи програм исписује бројеве 9, 7, 5, 3, 1 (сваки у посебном реду).

```
for i in range(9, 0, -2):
    print(i)
```

4.2.1.3 Прекиди петље (`break` и `continue`)

Наредба `break` у телу петље прекида извршавање петље. Наредба `continue` прекида извршавање тела петље (тј. извршавање текуће итерације).

4.2.2 Итерација кроз правилне серије бројева

Петље нам омогућавају да итерацију извршимо кроз правилне серије бројева (на пример, узастопне целе бројеве из неког интервала, аритметичке и геометријске серије бројева, серије подједнако размакнутих реалних бројева из неког реалног интервала и слично). Илуструјмо ово кроз неколико једноставних задатака. Технике које се у њима илуструју интензивно ће се користити у каснијим сложенијим задацима.

Задатак: Бројеви од a до b

Ако су дати цели бројеви a и b, написати програм који исписује редом све целе бројеве у задатом интервалу $[a, b]$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се цео број a, а у другој је цео број b ($-1000 \leq a \leq 1000, -1000 \leq b \leq 1000$).

Излаз: На стандардном излазу исписују се редом сви цели бројеви из интервала, у свакој линији по један број.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	3
6	4
	5
	6

Решење

Потребно је исписати све целе бројеве од `a` до `b` и да би се то могло урадити потребно је употребити петљу.

Најприроднији начин је да се употреби петља `for`. Користићемо је у комбинацији са функцијом `range` која гради опсег бројева. Пошто је доња граница укључена у опсег, а горња није, а ми желимо да набрајање почне са `a` и заврши се са `b`, користићемо позив `range(a, b+1)`.

```
a = int(input()); b = int(input())
for i in range(a, b+1):
   print(i)
```

Свака петља `for` може се једноставно изразити и помоћу петље `while`. Иницијализацију `i = a` потребно је извршити непосредно пре петље `while`, услов петље је `i <= b`, док се корак `i += 1` или `i = i + 1` додаје као последња наредба у телу петље.

Задатак је могуће решити и исписивањем тренутне вредности промењиве `a` у петљи `while`, при чему се при сваком проласку кроз петљу вредност промењиве `a` увећа за 1, све док `a` не достигне вредност већу од `b`. Мана таквог решења је да након исписа бројева, оригинални интервал $[a, b]$ није више доступан.

```
a = int(input()); b = int(input())
i = a
while i <= b:
   print(i)
   i = i + 1
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Бројање у игри жмурке

У игри жмурке деца обично броје по пет ($5, 10, 15, 20, \ldots$). Напиши програм који исписује баш те бројеве.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се број x ($100 \leq x \leq 1000$) дељив са 5.

Излаз: На стандардни излаз исписати бројеве дељиве са 5, почевши од 5 и завршивши са x. Сваки број исписати у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
30	5 10 15 20 25 30

Решење

Набрајање бројева са кораком 5

Приметимо сличност са задатком Бројеви од a до b. Једина разлика у односу њега је корак за који се увећава бројачка променљива. Функција `range` даје могућност да јој се као трећи аргумент наведе корак за који се разликују свака два узастопна елемента у опсегу чији ће се елементи набрајати. У овом задатку почетна вредност може бити 5, завршна за 1 већа од учитане горње границе (да би и та горња граница била укључена), док корак такође треба да буде 5.

```
x = int(input())
for i in range(5, x+1, 5):
    print(i)
```

Филтрирање

Још један могући приступ (додуше, мање ефикасан од претходног), је да се у петљи набрајају сви бројеви између 5 и x (слично као у задатку Бројеви од a до b), да се за сваки проверава да ли је дељив са 5 (слично као у задатку Збир година браће и сестре) и исписује се само ако јесте дељив. Кажемо да међу свим бројевима од 5 до горње границе *филтрирамо* оне дељиве са 5.

```
x = int(input())
for i in range(5, x+1):
    if i % 5 == 0:
        print(i)
```

Задатак: Троцифрени парни бројеви

За дате целе бројеве a и b, написати програм који исписује редом све парне троцифрене бројеве који припадају датом интервалу $[a, b]$

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се бројеви a и b ($0 \leq a \leq 1500$ и $a \leq b \leq 1500$).

Излаз: На стандардном излазу исписују се редом (од најмањег до највећег) сви парни троцифрени бројеви, у свакој линији по један број.

Пример

Улаз	*Излаз*
85 109	100 102 104 106 108

Решење

Овај задатак је веома сличан задатку Бројање у игри жмурке, једино што се као корак користи 2 уместо 5 и што доња и горња граница нису задате експлицитно.

Набрајање бројева са кораком 2

Потребно је исписати све троцифрене парне бројеве редом, почевши од најмањег троцифреног парног броја из целобројног интервала $[a, b]$ до највећег троцифреног парног броја из тог интервала. Троцифрени бројеви припадају целобројном интервалу $[100, 999]$. Дакле, тражени бројеви припадају пресеку та два интервала тј. интервалу $[\max(a, 100), \min(b, 999)]$ (одређивање пресека два интервала описано је у задатку Интервали). Пошто се траже само парни бројеви из интервала добијеног пресеком, набрајање треба почети од његове леве границе, ако је она парна, односно од њеног следбеника ако је она непарна, а завршити на десној граници ако је она парна тј. на њеном претходнику ако је она непарна. На тај начин добијамо интервал $[od, do]$ чије су границе парни бројеви и чије све парне бројеве треба исписати (провера да ли је број паран се своди на израчунавање остатака при дељењу са 2, слично како је описано у задатку Збир година браће и сестре).

Само набрајање бројева можемо извршити слично као у задатку Бројање у игри жмурке, било помоћу петље `for`, било помоћу петље `while`.

```
# ucitavamo interval [a, b]
a = int(input()); b = int(input())
# odredjujemo presek sa intervalom [100, 999]
od = max(a, 100); do = min(b, 999)
# osiguravamo da levi i desni kraj budu parni brojevi
if (od % 2 != 0):
   od = od + 1
if (do % 2 != 0):
   do = do - 1
# vrsimo iteraciju i ispisujemo sve trazene brojeve
for i in range(od, do+1, 2):
   print(i)
```

Филтрирање

Други начин (мање ефикасан од претходног) је заснован на филтрирању. Могуће је да се итерација (набрајање) врши редом по свим бројевима из целобројног интервала $[100, 999]$, да се за сваки број проверава да ли припада интервалу $[a, b]$ (да ли је између a и b) и да ли је паран, и да се број исписује само ако су оба услова испуњена.

```
# ucitavamo interval [a, b]
a = int(input()); b = int(input())
# za svaki trocifren broj
for i in range(100, 999+1):
   # proveravamo da li je paran broj iz intervala [a, b]
   if a <= i and i <= b and i % 2 == 0:
      print(i)
```

Задатак: Одбројавање уназад

Написати програм који одбројава уназад од датог броја до нуле.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се природан број a мањи од 100 од којег почиње одбројавање.

Излаз: На стандардном излазу исписују се редом (од највећег до најмањег) сви бројеви од a до нуле. Сваки број приказати у посебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	3
	2
	1
	0

Решење

Потребно је исписати све бројеве од a до 0. Задатак можемо решити помоћу петље `for` или помоћу петље `while`. Ако користимо петљу `for`, тада ћемо променљивој i (бројачка променљива петље `for`), додељивати редом вредности од највеће (тј. од вредности a) до најмање (тј. до вредности 0) и у сваком пролазу кроз петљу исписивати њену вредност. Бројање уназад се може постићи тако што се функцији `range` као трећи аргумент (корак) наведе вредност `-1`. Први аргумент је почетна вредност ‘а, а пошто десна граница није

укључена, као други аргумент је потребно навести вредност која је за један мања од жељене границе (зато уместо 0 наводимо -1).

```
a = int(input())
for i in range(a, -1, -1):
   print(i)
```

Решење са петљом `while` се може имплементирати и без помоћне бројачке промељиве (тако што се умањује вредност `a`). Умањивање променљиве за један се може постићи изразом `a -= 1` или `a = a - 1`.

```
a = int(input())
while a >= 0:
   print(a)
   a -= 1
```

Задатак: Најаве емисије у правилним временским интервалима

Познат је почетак и крај једног филма (времена у сатима и минутима). У правилним временским интервалима, прво на почетку филма и затим након сваких m минута у углу екрана се приказује најава следеће емисије. Напиши програм који исписује времена у којима се приказује та најава.

Улаз: На стандардном улазу налази се време почетка филма дато у облику два цела броја, сваког у засебној линији који представљају број сати и број минута, затим, у следећој линији време завршетка филма дато у истом облику и на крају један цео број који представља интервал у минутима у којем се приказује најава.

Излаз: На стандардном излазу приказати, времена емитовања најаве у облику `h:m`, свако у засебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
12	12:0
0	12:15
13	12:30
23	12:45
15	13:0
	13:15

Решење

Рад са временом се олакшава ако се уведу помоћне функције за превођење датог времена у број минута протеклих од поноћи и обратно (слично као што је то рађено, на пример, у задатку Поноћ). Тако ћемо времена почетка и завршетка филма изразити у минутама. Времена приказивања најаве ћемо израчунати и исписати у оквиру петље у којој се користи променљива која представља време текуће најаве (опет у минутима). Полазећи од времена почетка филма у сваком кораку петље приказаћемо текуће време најаве и увећати га за интервал у минутима, док не престигне време завршетка филма, слично као у задатку Бројање у игри жмурке. Наравно, ово је могуће имплементирати било петљом `for`, било петљом `while`.

```
def u_minute(h, m):
    return h * 60 + m

def od_minuta(M):
    m = M % 60
    h = M // 60
    return (h, m)

# vreme pocetka filma
hPocetak = int(input())
mPocetak = int(input())
pocetak = u_minute(hPocetak, mPocetak)
# vreme zavrsetka filma
hKraj = int(input())
mKraj = int(input())
kraj = u_minute(hKraj, mKraj)
# interval u kojem se emituju najave
```

```
interval = int(input())
# izracunavamo vremena u kojima se emituje najava i ispisujemo ih
for najava in range(pocetak, kraj+1, interval):
   (hNajava, mNajava) = od_minuta(najava)
   print(hNajava, ":", mNajava, sep="")
```

Задатак: Подела интервала на једнаке делове

Написати програм којим се исписују вредности n равномерно размакнутих реалних бројева из интервала $[a, b]$, тако да је прва вредност a, а последња b.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број n $(1 < n \leq 20)$, друга линија садржи реалан број a, а трећа линија реалан број b, при чему је $a < b$.

Излаз: На стандардном излазу приказати редом тражене бројеве, заокружене на пет децимала, сваки у посебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	-1.00000
-1	-0.50000
1	0.00000
	0.50000
	1.00000

Решење

Потребно је прво одредити равномерно растојање dx, између n бројева интервала $[a, b]$ тако да је први број a, а последњи b. Таквих n бројева деле интервал $[a, b]$ на $n - 1$ једнаких делова, па је растојање dx између свака два броја $\frac{b-a}{n-1}$. Након тога је могуће применити исту технику као у задацима Бројање у игри жмурке или Најаве емисије у правилним временским интервалима и делује да га је могуће решити петљом облика

```
x = a
while x <= b:
    ...
    x += dx
```

Међутим, због непрецизности до којих може доћи при раду са реалним бројевима, а о чему ће више речи бити у наставку збирке могуће је да се вредност растојања dx не може сасвим прецизно репрезентовати и да променљива `dx = (b-a) / (n-1)` заправо садржи вредност која је мало већа од стварне вредности растојања dx. Зато је могуће да се деси да вредност променљиве `x` у последњој итерацији тек за мало премаши вредност променљиве `b` и да се због тога прескочи исписивање десног краја интервала тј. тачке b, што је грешка.

Због тога је ипак пожељно итерацију контролисати бројачем помоћу којег се броје тачке које су исписане, тј. помоћу петље облика

```
for i in range(n):
    ...
```

Једна могућност је да се у реалној променљивој x чува вредност текуће тачке, да се пре почетка петље она иницијализује на вредност a, а да се у сваком кораку петље она исписује и затим увећава за вредност dx.

```
n = int(input())
a = float(input())
b = float(input())
dx = (b - a) / (n - 1)
x = a
for i in range(n):
   print(format(x, '.5f'))
   x = x + dx
```

Може се приметити да су тражени бројеви $a, a+dx, a+2\cdot dx, ..., a+(n-1)\cdot dx$, па се они могу приказивати као бројеви $a + i \cdot dx$ за све целе бројеве i од 0 до $n - 1$ (кажемо да *пресликавамо* бројеве од 0 до $n - 1$ функцијом $f(i) = a + i \cdot dx$, што је слично задацима Прерачунавање миља у километре и Табелирање функције).

```
n = int(input())
a = float(input())
b = float(input())
dx = (b - a) / (n - 1)
for i in range(n):
   print(format(a + i * dx, '.5f'))
```

Задатак: Геометријска серија

Написати програм који за дате природне бројеве a, b исписује бројеве из интервала $[a, b]$, од којих је први број који се исписује једнак a, а сваки следећи је три пута већи од претходног. На пример, за $[a, b] = [5, 50]$ треба исписати 5, 15, 45.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају природни бројеви a ($1 \leq a \leq 50$) и b ($a \leq b \leq 10000$) сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардном излазу исписују се сви тражени бројеви, редом (од најмањег до највећег). Сваки број исписати у посебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	5
50	15
	45

Решење

Потребно је исписати све природне бројеве из интервала $[a, b]$, од којих је први број који се исписује једнак a, а сваки следећи три пута већи од претходног.

Задатак ћемо решити тако што ћемо у промењљивој коју ћемо мењати кроз петљу одржавати текућу вредност ове серије бројева. Промењљиву ћемо иницијализовати на вредност a, а затим у петљи проверавати да ли јој је вредност мања или једнака b и ако јесте исписиваћемо је и множићемо јој вредност са три. На оваквом месту је прилично природно употребити петљу `while` (нарочито под утицајем језика попут Паскала или Пајтона, где је петља `for` резервисана за серије у којима се бројачка промењљива у сваком кораку увећава за 1 или евентуално за неки константан корак).

```
# ucitavamo interval [a, b]
a = int(input()); b = int(input())
# generisemo i ispisujemo sve trazene brojeve iz intervala [a, b]
i = a
while i <= b:
  print(i)
  i *= 3
```

4.2.3 Учитавање серија бројева

У великом броју задатака серије података које се обрађују учитавају се са стандардног улаза. У неколико наредних једноставних програма сусрешћемо се са најчешћим улазним форматима и техникама њиховог учитавања. Те технике ће се интензивно користити у каснијим сложенијим задацима.

Задатак: Збир n бројева

Написати програм којим се одређује збир n датих целих бројева.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($1 \leq n \leq 1000$). У свакој од наредних n линија налази се по један цео број x_i.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати збир унетих n целих бројева $x_1, \ldots, x_n$.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 10 -3 2 4	13

Решење

Пошто је познат укупан број n бројева које треба учитати, централно место у програму биће петља чије тело (у којем се учитава и обрађује следећи број) треба да се изврши тачно n пута. Пошто програмски језици обично немају наредбу облика `ponovi n puta`, извршавање наредби n пута најчешће се остварује петљом следећег облика:

```
for i in range(n):
  ...
```

За одређивање збира учитаних бројева користимо променљиву `zbir` у којој редом акумулирамо збир тренутно прочитаних бројева са стандардног улаза (идеју таквог поступног израчунавања збира видели смо, на пример, у задатку Квалификациони праг). Вредност променљиве `zbir` иницијализујемо на 0. Након тога, кроз петљу пролазимо n пута, а у сваком проласку учитавамо број са стандардног улаза и сваки прочитани број додајемо на збир. По завршетку петље, вредност збира приказујемо на стандардном излазу. На пример, ако се учитавају редом бројеви 1, 2, 3 и 4, променљива `zbir` ће редом имати вредности 0, 1, 3, 6 и 10. Нагласимо и да није било потребе истовремено памтити све бројеве да би се одредио њихов збир.

Збир серије бројева представља једну од основних њених статистика. У каснијим задацима показаћемо како можемо израчунавати и друге важне статистике (број елемената, производ, просек, минимум, максимум итд.).

```
n = int(input())        # broj brojeva
zbir = 0                # zbir brojeva
for i in range(n):      # n puta ponavljamo
   broj = int(input())  #    učitavamo broj
   zbir = zbir + broj   #    uvećavamo zbir
print(zbir)             # ispisujemo konačan zbir
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Читање до нуле

Уносе се цели бројеви док се не унесе нула. Написати програм којим се приказује колико је унето бројева, не рачунајући нулу.

Улаз: Свака линија стандардног улаза, изузев последње, садржи цео број различит од нуле. Последња линија садржи нулу.

Излаз: На стандардном излазу у првој линији приказати колко је учитано бројева, не рачунајући нулу.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5 -675 123 0	3

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0	0

Решење

Задатак ћемо решити помоћу разних врста петљи. У свим случајевима услов за излазак из петље је када је учитани број једнак 0.

У решењу помоћу петље `while` први број учитавамо пре петље, а у телу петље прво увећавамо бројач за 1 а затим учитавамо следећи број. На овај начин 0 као последњи учитани број неће довести до промене бројача.

```
broj = 0              # broj ucitanih brojeva razlicitih od nule
x = int(input())      # citamo prvi broj
while x != 0:         # dok nije ucitana nula
```

```
    broj = broj + 1   #   uvecavamo brojac
    x = int(input())  #   ucitavamo naredni broj
print(broj)           # ispisujemo rezultat
```

Још једна могућност је да се испитивање услова прекида петље врши унутар њеног тела, непосредно након учитавања броја. То се може остварити тиме што се креира бесконачна петља облика `while True:`, чији је услов стално испуњен, а унутар чијег тела се налази наредба `if x == 0: break`.

```
broj = 0
while True:
    x = int(input())
    if x == 0:
        break
    broj = broj + 1
print(broj)
```

Задатак: Читање до краја улаза

Са улаза се уносе цели бројеви све док се не дође до краја улаза. Написати програм којим се приказује колико је унето бројева.

Улаз: Свака линија стандардног улаза садржи по један цео број. НАПОМЕНА: приликом интерактивног тестирања програма, крај стандардног улаза се означава комбинацијом тастера `ctrl + z` ако се користи оперативни систем Windows тј. `ctrl + d` ако се користи оперативни систем Linux.

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати колико је бројева унето.

Пример

Улаз	*Излаз*
20	4
145	
-23	
-12	

Решење

Слично као у задатку Читање до нуле и овом задатку врши се пребројавање серије елемената. Бројач се иницијализује на нулу и увећава се за сваки учитани број. Кључно питање је како организовати петљу у којој се учитавају бројеви све док се не достигне крај улаза.

Најједноставнији начин да у језику Пајтон прочитамо све линије стандардног улаза је да у петљи пређемо кроз све елементе колекције `sys.stdin` (за њено коришћење је на почетку програма неопходно укључити модул `sys`, директивом `import sys`) која садржи све линије стандардног улаза (о колекцијама и итерацији кроз њихове елементе биће више речи у наредним поглављима).

```
import sys
broj = 0
for linija in sys.stdin:
    broj = broj + 1
print(broj)
```

Решење можемо засновати и на обради изузетака. Учитавање вршимо у бесконачној петљи (петљи облика `while True`). У телу петље покушавамо учитавање броја, али у наредби која је ограђена блоком `try-except`. Ако учитавање успе, увећавамо бројач. Када више није могуће прочитати број, наступиће изузетак и контрола ће се пребацити на део `except` у који ћемо поставити наредбу `break` за прекид петље.

```
broj = 0
while True:
    try:
        x = int(input())
        broj = broj + 1
    except:
        break
```

```
print(broj)
```

Задатак: Читање до -1 или до n-тог броја

Пера се током часа играо и сецкао квадрате од папира. Учитељица је то приметила и дала му је задатак да израчуна укупну површину свих квадрата које је исекао. Напиши програм који Пери помаже да то уради. Пера, на самом почетку уноси број n за који је сигуран да је већи или једнак броју квадратића. Након тога, уноси највише n бројева који представљају дужине страница квадратића, при чему, ако примети да квадратића има мање од броја n, он уноси -1, чиме означава да је потребно прекинути унос.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($0 \leq n \leq 15$), а затим m ($1 \leq m \leq n$) целих бројева између 1 и 10, при чему, ако је $m < n$, онда се након њих уноси -1.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља укупну површину свих квадрата.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3	14
1	
2	
3	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5	14
1	
2	
3	
-1	

Решење

Задатак захтева израчунавање збира квадрата учитаних елемената. То се ради веома слично израчунавању збира елемената које смо приказали у задатку Збир n бројева, једино што се на збир уместо сваког учитаног броја x додаје његов квадрат. Основна тежина овог задатка не лежи у израчунавању збира квадрата, већ у организацији уноса података тако да се бројеви учитавају све док се не учита број -1 или док се не учита n бројева.

Један начин да се то уради је да се организује петља у којој се учитава n бројева (на уобичајени начин, као у задатку Збир n бројева), да се у телу те петље учитава број, да се затим проверава да ли је учитан број -1 и ако јесте да се прекине петља (наредбом `break`), а ако није, да се збир увећа за квадрат учитаног броја. Напоменимо да се увећавање не мора вршити у грани `else`, већ може и након наредбе гранања - ако је услов да је учитан број -1 испуњен, извршиће се наредба `break`, петља ће се прекинути и неће се ни стићи до наредбе иза наредбе гранања.

```
n = int(input())
zbir = 0
for i in range(n):
   x = int(input())
   if (x == -1):
      break
   zbir = zbir + x * x
print(zbir)
```

Један начин је да услов изласка из петље обухвати оба услова (да је број x различит од -1 и да је тренутни број учитаних елемената мањи од n). Пошто је због случаја $n = 0$ услов потребно проверавати пре читања и једног броја, морамо користити петљу са провером услова на почетку (петљу `while`). Да би услов да је x различит од -1 био испуњен при првом уласку у петљу, променљиву x пре петље морамо иницијализовати на вредност различиту од -1 (иницијализоваћемо је, на пример, на вредност 0). Након учитавања броја, пре додавања његовог квадрата поново морамо проверити да ли је учитани број различит од -1.

```
n = int(input())
zbir = 0
i = 0
x = 0
while i < n and x != -1:
   x = int(input())
   i = i + 1
   if (x != -1):
```

```
        zbir = zbir + x * x
print(zbir)
```

Модификација овог решења уместо наредбе `break` може да користи логичку променљиву `kraj` којом се одређује да ли је учитана вредност -1. Њену вредност иницијализујемо на `False`, услов петље је да важи `not kraj` као и да је учитано мање од n елемената, док се у телу петље, након учитавања броја проверава да ли је он -1 и ако јесте, вредност `kraj` се поставља на `True`, а у супротном се збир увећава за квадрат учитаног броја.

```
n = int(input())
zbir = 0
kraj = False
i = 0
while not kraj and i < n:
    x = int(input())
    if x == -1:
        kraj = True
    else:
        zbir = zbir + x * x
    i = i + 1
print(zbir)
```

4.2.4 Пресликавање серије бројева

Пресликавање серије подразумева примену одређене трансформације (математичке функције) на сваки њен елемент.

Задатак: Прерачунавање миља у километре

Миља је енглеска историјска мера за дужину која износи $1609.344\,\mathrm{m}$. Напиши програм који исписује таблицу прерачунавања миља у километре.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе цели бројеви a ($1 \leq a \leq 10$), b ($10 \leq b \leq 100$) и k ($1 \leq k \leq 10$).

Излаз: На стандардни излаз исписати табелу конверзије миља у километре за сваки број миља из интервала $[a, b]$, са кораком k. Број километара заокружити на 6 децимала, а табелу приказати у формату идентичном као у примеру.

Пример

Улаз	*Излаз*
`10`	`10 mi = 16.093440 km`
`20`	`12 mi = 19.312128 km`
`2`	`14 mi = 22.530816 km`
	`16 mi = 25.749504 km`
	`18 mi = 28.968192 km`
	`20 mi = 32.186880 km`

Решење

Овај задатак представља класичан пример табелирања дате функције, тј. примене функције на сваки елемент неке серије бројева (кажемо да се врши *пресликавање серије*).

У петљи је потребно проћи кроз све бројеве миља из интервала $[a, b]$, са кораком k. То је најлакше урадити помоћу петље `for`, слично као у задатку Бројање у игри жмурке и Троцифрени парни бројеви. Број километара у сваком кораку петље добијамо тако што број миља помножимо са `1.609344`.

```
kilometara_u_milji = 1.609344   # broj kilometara u jednoj milji
# učitavamo interval i korak
a = int(input()); b = int(input()); korak = int(input())
# pretvaramo sve željene brojeve milja u kilometre
for broj_milja in range(a, b+1, korak):
    broj_kilometara = broj_milja * kilometara_u_milji
    print(f'{broj_milja} mi = {broj_kilometara:.6f} km')
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Табелирање функције

Аутомобил се креће равномерно убрзано са почетном брзином v_0 (израженом у $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) и убрзањем a (израженим у $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Укупно време до постизања максималне брзине је T секунди. На сваких Δt секунди од почетка потребно је израчунати пређени пут аутомобила. Напомена: за равномерно убрзано кретање пређени пут након протеклог времена t изражава се са $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се 4 реална броја (сваки је у посебном реду):

- v_0 ($0 \leq v_0 \leq 5$) - почетна брзина
- a ($1 \leq a \leq 3$) - убрзање
- T ($5 \leq T \leq 10$) - укупно време
- Δt ($0.1 \leq \Delta t \leq 2.5$) - интервал

Излаз: На стадардни излаз исписати серију бројева који представљају пређени пут у задатим тренуцима.

Пример

Улаз	*Излаз*
1	0.00000
1	0.62500
2	1.50000
0.5	2.62500
	4.00000

Решење

Потребно је у петљи обићи све тачке t интервала $[0, T]$ (што се може урадити на исти начин како је то урађено у задатку Најаве емисије у правилним временским интервалима). За свако време t израчунавамо пређени пут по формули $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ (видели смо је у задатку Бициклиста) и исписујемо га.

Приметимо да се у овом задатку заправо врши табелирање једне (у овом случају квадратне) функције тј. пресликавање серије бројева, слично као у задатку Прерачунавање миља у километре у којем се вршило табелирање линеарне функције и све технике решавања се могу пренети из тог задатка.

```
# pocetna brzina i ubrzanje
v0 = float(input()); a = float(input())
# vreme koje traje kretanje i interval u kome se prikazuje predjeni put
T = float(input()); dt = float(input())
# krenuvsi od vremena 0 pa sve do T, na svakih dt izracunavamo
# predjeni put i ispisujemo ga
t = 0
while t <= T:
   s = v0 * t + a * t * t / 2.0
   print(format(s, '.5f'))
   t = t + dt
```

4.2.5 Елементарне статистике (број елемената, збир, производ, просек, средине, ...)

У неколико претходних задатака смо рачунали одређене једноставне статистике дужих серија бројева (на пример, у задатку Збир n бројева смо рачунали збир унетих бројева, у задатку Читање до нуле смо рачунали број учитаних елемената). У задацима који следе ћемо показати како се израчунавају и остале елементарне статистике дужих серија бројева: број њихових елемената, збир, производ, просек тј. аритметичку средину, друге облике средина (геометријску, хармонијску) итд.

Задатак: Факторијел

Дате су цифре $1, 2, \ldots, n$. Напиши програм који израчунава колико се различитих n-тоцифрених бројева састављених од свих тих цифара може направити (на пример, од цифара $1, 2, 3$ могу се направити бројеви 123, 132, 213, 231, 312 и 321).

Напомена: Број пермутација скупа од n елемената једнак је факторијелу броја n тј. броју $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Размисли зашто је баш тако.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($1 \leq n \leq 9$).

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати број различитих бројева који се могу направити од цифара $1, 2, \ldots, n$.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5	120

Пример 2

Улаз	*Излаз*
9	362880

Решење

За одређивање факторијела природног броја n користимо променљиву `faktorijel` у којој редом акумулирамо производ бројева од 1 до n.

На почетку вредност променљиве `faktorijel` поставимо на 1. Након тога, коришћењем петље у којој ћемо бројачкој променљивој i, додељивати редом вредности од 1 до n, у сваком пролазу кроз петљу променљиву `faktorijel` множити са i.

Приметимо велику сличност са алгоритмом одређивања збира n бројева (види задатак Збир n бројева). Збир се иницијализује на вредност 0, што је неутрални елемент при сабирању, слично као што се производ инцијализује на вредност 1, што је неутрални елемент при множењу. Такође, у сваком кораку збир се увећава, док се производ множи текућим елементом серије.

```
n = int(input())
faktorijel = 1
for i in range(1, n+1):
   faktorijel = faktorijel * i
print(faktorijel)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Степен

Напиши програм који израчунава степен x^n. Покушај да програм напишеш без употребе библиотечких функција и оператора за степеновање.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси реалан број x ($0.8 \leq x \leq 1.2$) и цео број n ($0 \leq n \leq 20$).

Излаз: На стандардни излаз испиши вредност x^n заокружену на пет децимала.

Пример

Улаз	*Излаз*
1.1 5	1.61051

Решење

Множење

Резултат можемо добити ако израчунамо производ $\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$. Производ серије итеративно можемо израчунати слично као у задатку Факторијел - вредност производа иницијализујемо на јединицу, а затим га у сваком кораку петље множимо са наредним елементом серије (у овом случају вредношћу x).

```
x = float(input())
n = int(input())
stepen = 1.0
for i in range(n):
    stepen *= x
print(format(stepen, '.5f'))
```

Библиотечка функција степеновања

Већина језика већ пружа готову функцију или операцију степеновања. У језику Пајтон степеновање је могуће извршити оператором `**` или функцијом `math.pow`.

```
x = float(input())
n = int(input())
print(format(x ** n, '.5f'))
```

Задатак: Просек свих бројева до краја улаза

Са стандардног улаза се учитава број поена такмичара на такмичењу из програмирања. Напиши програм који израчунава просечан број поена свих такмичара.

Улаз: Сваки ред стандардног улаза садржи један цео број између 0 и 100. НАПОМЕНА: приликом интерактивног тестирања програма, крај стандардног улаза се означава комбинацијом тастера `ctrl + z` ако се користи оперативни систем Windows тј. `ctrl + d` ако се користи оперативни систем Linux.

Излаз: На стандардни излаз исписати просек заокружен на 5 децимала.

Пример

Улаз	*Излаз*
1	2.50000
2	
3	
4	

Решење

Као што смо већ видели, на пример, у задатку Најлошији контролни, рачунање просека серије бројева своди се на засебно израчунавање збира и броја елемената серије и њихово дељење.

У задатку Збир n бројева видели смо да се збир серије бројева израчунава тако што се променљива у којој се акумулира збир иницијализује на нулу, а затим се у петљи пролази кроз елементе серије и збир се увећава за текући елемент.

У задатку Читање до нуле видели смо да се број елемената серије одређује тако што се бројачка променљива у којој се тај број акумулира иницијализује на нулу, а затим се у петљи пролази кроз елементе серије и бројач се у сваком кораку увећава за један.

у задатку Читање до краја улаза показано је како се може организовати петља која учитава све бројеве са стандардног улаза.

```
import sys

zbir = 0                # zbir svih učitanih brojeva
broj = 0                # broj svih učitanih brojeva
for linija in sys.stdin: # obrađujemo sve linije do kraja ulaza
    x = int(linija)      #   učitavamo broj iz linije
    zbir = zbir + x      #   ažuriramo zbir
    broj = broj + 1      #   ažuriramo broj
prosek = zbir / broj     # izračunavamo i ispisujemo prosek
print(format(prosek, '.5f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Средине

Аутомобил путује мењајући брзину током путовања. Познато је да се један део пута кретао равномерно брзином v_1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, затим се један део пута кретао равномерно брзином v_2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, и тако даље, све до последњег дела пута где се кретао равномерно брзином од v_n $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Написати програм који одређује просечну брзину аутомобила на том путу и то:

- ако се претпостави да је сваки део пута трајао исто време,
- ако се претпостави да је на сваком делу пута аутомобил прешао исто растојање.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се n ($2 \leq n \leq 10$) позитивних реалних бројева: v_1, v_2, …, v_n (za svako v_i важи $30 \leq v_i \leq 120$), након чега следи крај улаза.

Излаз: У првој линији стандардног излаза исписати реалан број заокружен на 2 децимале који представља просечну брзину под претпоставком да је сваки део пута трајао исто време, а у другом реду реалан број

заокружен на 2 децимале који представља просечну брзину под претпоставком да је на сваком делу пута аутомобил прешао исто растојање.

Пример

Улаз	*Излаз*
60	50.00
40	48.00

Решење

Просечна брзина представља однос укупног пређеног пута и укупног времена трајања пута (види задатак Путовање).

Претпоставимо да је сваки део пута трајао исто време t (у сатима). Тада је на првом делу пута аутомобил прешао $v_1 \cdot t$ километара, на другом $v_2 \cdot t$ километара, и тако даље, док је на последњем делу прешао $v_n \cdot t$ километара. Дакле, укупан пређени пут је $(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) \cdot t$ километара. Укупно време је $n \cdot t$ сати. Зато је просечна брзина једнака $\frac{(v_1+v_2+\ldots+v_n)\cdot t}{n \cdot t} = \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}$.

Претпоставимо сада да је на сваком делу пута аутомобил прешао исто растојање s (у километрима). Тада се на првом делу пута кретао $\frac{s}{v_1}$ сати, на другом $\frac{s}{v_2}$ сати и тако даље, све до последњег дела где се кретао $\frac{s}{v_n}$ сати. Дакле, укупни пређени пут је $n \cdot s$, док је укупно време једнако $\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \ldots + \frac{s}{v_n}$. Дакле, просечна брзина једнака је $\frac{s \cdot n}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\ldots+\frac{s}{v_n}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}}$.

Приметимо да се у првом случају просечна брзина израчунава као *аритметичка средина* појединачних брзина, док се у другом случају израчунава као *хармонијска средина* појединачних брзина.

Израчунавање аритметичке средине (просечне вредности) свих бројева учитаних са стандардног улаза приказали смо у задатку Просек свих бројева до краја улаза. Што се тиче израчунавања хармонијске средине, она се може израчунати тако што се израчуна збир реципрочних вредности свих брзина, а затим се n подели тим бројем. Збир реципрочних вредности се рачуна тако што се на променљиву коју иницијализујемо на нулу у петљи додају једна по једна реципрочна вредност.

```
import sys

broj = 0                  # broj delova puta
zbir = 0.0                # zbir svih brzina
zbir_reciprocnih = 0.0    # zbir recipročnih vrednosti svih brzina

# obrađujemo sve linije standardnog ulaza
for linija in sys.stdin:
    # učitavamo brzinu
    v = float(linija)
    # ažuriramo sve statistike
    broj = broj + 1
    zbir = zbir + v
    zbir_reciprocnih = zbir_reciprocnih + 1.0 / v

# izračunavamo i ispisujemo aritmetičku i harmonijsku sredinu
aritmeticka_sredina = zbir / broj
harmonijska_sredina = broj / zbir_reciprocnih
print(format(aritmeticka_sredina, '.2f'))
print(format(harmonijska_sredina, '.2f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Просечан раст цена

Потрошачка корпа је коштала 60000 динара. Након годину дана цене су порасле 21 проценат и потрошачка корпа је коштала 72600 динара. Након друге године цене су порасле још 44 процента и потрошачка корпа је коштала 104544 динара. Поставља се питање колико је просечно годишње порасла цена потрошачке корпе. Дефинишимо да ће просечан проценат пораста цене бити онај који, када се примени након сваке године, на крају дати исту цену као и у случају полазних пораста цена. У нашем примеру, ако би цена порасла 32 процента након годину дана потрошачка корпа би коштала 79200 динара, и ако би након друге године порасла

још 32 процента, на крају би коштала поново тачно 104544 динара, тако да кажемо да је просечан пораст цене 32 процента. Напиши програм који за дате појединачне проценте пораста цене након сваке године израчунава просечан проценат пораста цене током целог периода.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n (важи $2 \leq n \leq 10$) а затим n реалних бројева $p_1, p_2, \ldots, p_n$ који представљају проценте раста цене на крају сваке године (за свако p_i важи да је $5 \leq p_i \leq 50$).

Излаз: На стандардни излаз приказати један реалан број заокружен на две децимале који представља просечан проценат пораста цене.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
2	32.00
21	
44	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5	22.68
47.0	
13.0	
13.5	
26.5	
16.5	

Решење

Претпоставимо да је основна цена производа C. Тада је цена након првог месеца једнака $C \cdot (1 + \frac{p_1}{100})$, након два месеца једнака $C \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 + \frac{p_2}{100})$ и тако даље, да би на крају n месеци била једнака $C \cdot (1 + \frac{p_1}{100})(1 + \frac{p_2}{100}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{p_n}{100})$. Ако би пораст цене у сваком месецу било p тада би цена након n месеци била једнака $C \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$. Пошто желимо да овако израчунате коначне цене буду једнаке, тј. да важи $C \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{p_n}{100}) = C \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$, p се може израчунати као

$$p = 100 \cdot (\sqrt[n]{(1 + \frac{p_1}{100}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{p_n}{100})} - 1).$$

n-ти корен из производа n бројева назива се *геометријска средина*.

Производ серије можемо израчунати на исти начин као у задатку Факторијел - алгоритмом у коме резултат иницијализујемо на 1 и множимо га редом једним по једним кофицијентом повећања $1 + \frac{p}{100}$.

Корен можемо израчунати свођењем на степеновање $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ и применом функције `math.pow` (као у задатку Степен и корен).

```
import math

n = int(input())      # broj godina
# učitavamo procenat rasta za svaku godinu i
# izračunavamo proizvod koeficijenata rasta
proizvod = 1.0
for i in range(n):
   pi = float(input())   # procenat rasta u tekućoj godini
   proizvod = proizvod * (1.0 + pi / 100.0)

# izračunavamo i ispisujemo prosečno poskupljene
prosecno_poskupljenje = 100.0 * (math.pow(proizvod, 1.0 / n) - 1.0)
print(format(prosecno_poskupljenje, '.2f'))
```

Задатак: Производња малина

Власник имања, Маринко, одлучио је да гаји малине. Направио је план за n година. Прве године планира да произведе t тона малина, а сваке следеће да повећа производњу за $p\%$. Написати програм којим се одређује колико тона малина Маринко планира да произведе n-те године узгајања малина.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број n ($n \leq 10$) број планираних година. Друга и трећа линија стандардног улаза садрже по један реалан број, који редом представљају колико тона малина Маринко планира да произведе прве године t ($0 < t < 5$) и за колико процената Маринко планира да повећа производњу сваке године p ($10 \leq p \leq 50$).

Излаз: На стандардном излазу приказати, на две децимале, колико тона малина Маринко планира да произведе n-те године узгајања малина.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 2 25	4.88

Задатак: Сума низа бројева

Професор математике је поставио следећи задатак:

Одредити суму n бројева, ако је први број дати број a, а сваки следећи број добија се тако што претходни број помножимо са датим бројем q.

Ученик који први реши задатак добија петицу. Помозите ученицима, напишите програм којим се за дати природан број n, и дате реалне бројеве a и q одређује тражена сума.

Улаз:

- Прва линија стандардног улаза садржи природан број n ($n \leq 50$).
- Друга линија стандардног улаза садржи реалан број a ($0 < a \leq 10$).
- Трећа линија стандардног улаза садржи реалан број q ($0 < q < 1$).

Излаз: На стандардном излазу приказати, на пет децимала, тражену суму бројева.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 20.00 0.50	37.50000

Задатак: Једнакост растојања

Становници једне дугачке улице желе да одреде положај на којем ће бити направљена антена за мобилну телефонију. Пошто желе да локацију одреде на најправеднији могући начин, договорили су се да антену сагради на месту на ком ће збир растојања свих оних који се налазе лево од антене до ње, бити једнак збиру растојања свих оних који се налазе десно од антене до ње. Ако су познате координате свих кућа у улици (можемо замислити да су то координате тачака на једној правој), напиши програм који одређује положај антенте.

Улаз: Са стандардног улаза у првој линији се уноси природан број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број станара, а у наредних n линија реални бројеви (од -1000 до 1000) који представљају координате станара (x координате тачака на оси).

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља тражени положај антене (допуштена је толеранција грешке 10^{-5}).

Пример

Улаз	*Излаз*
5 -7.34 15.6 3.67 -22.17 6.2	-0.80800

Задатак: Тежиште

Тежиште T троугла ABC је пресек његових тежишних дужи. Та тачка има и друга занимљива својства. На пример, када бисмо изрезали троугао од папира, могли бисмо да га балансирамо на врху оловке, само ако бисмо оловку поставили у тежиште троугла. Такође, тежиште је тачка таква да је збир квадрата растојања између ње и темена троугла (тј. израз $|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2$) најмањи могућ. Уједно, то је једина тачка таква

да је збир вектора $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{0}$. Користећи последње поменуто својство, појам тежишта се може уопштити на произвољан коначан скуп тачака (тада се понекад назива и барицентар или центроид). Напиши програм који за n тачака равни задатих својим координатама одређује њихово тежиште.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се број $3 \leq n \leq 100$ и затим $2n$ парова реалних бројева (x_i, y_i), при чему је сваки број у посебном реду, који представљају координате n тачака равни.

Излаз: На стандардни излаз исписати координате тежишта тог скупа тачака, прво координату x, затим координату y, сваку у посебном реду, заокружену на пет децимала.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 0 0 0 1 1 0	0.33333 0.33333

Решење

Овај задатак представља уопштење задатка Једнакост растојања у коме је заправо разматрано тежиште скупа тачака на правој и одређено је као просечна вредност координата тачака. Исто ће се догодити и код тачака у равни. Заиста, обележимо тежиште са T, а тачке са $A_1, \ldots, A_n$, а са $\overrightarrow{OT} = (T_x, T_y)$, $\overrightarrow{OA_1} = (A_{1x}, A_{1y})$, …, $\overrightarrow{OA_n} = (A_{nx}, A_{ny})$ векторе њихових координата. Кренимо од услова да је $\overrightarrow{A_1T} + \ldots + \overrightarrow{A_nT} = \overrightarrow{0}$. У последњој једнакости додамо на обе стране $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$ и добијамо $n \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$, односно $\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}}{n}$.

Одатле следи:

$$T_x = \frac{A_{1x} + A_{2x} + \ldots A_{nx}}{n}$$

$$T_y = \frac{A_{1y} + A_{2y} + \ldots A_{ny}}{n}$$

Задатак се решава једноставним израчунавањем аритметичких средина координата x и координата y датих тачака, на потпуно исти начин као што је то урађено у задатку Једнакост растојања.

```
# broj tacaka
n = int(input())
# zbir koordinata x i koordinata y
zbir_x = 0.0
zbir_y = 0.0
for i in range(n):
    # koordinate tekuce tacke
    x = float(input())
    y = float(input())
    # uvecavamo zbirove
    zbir_x = zbir_x + x
    zbir_y = zbir_y + y

# izracunavamo proseke
t_x = zbir_x / n
t_y = zbir_y / n
# ispisujemo rezultat
print(format(t_x, '.5f'))
print(format(t_y, '.5f'))
```

4.2.6 Филтрирање серије бројева

Филтрирање подразумева издвајање свих елемената серије који задовољавају неки дати услов. Над филтрираном серијом обично се спроводи даља обрада (пресликавање, израчунавање различитих статистика и слично).

Задатак: Бројеви дељиви са 3

Напиши програм који међу унетим бројевима одређује и исписује оне који су дељиви са 3.

Улаз: Са стандардног улаза се најпре учитава природан број n ($1 \leq n \leq 1000$), а потом и n природних бројева из интервала $[1, 10^8]$, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати све учитане бројеве који су дељиви са 3 (у истом редоследу у ком су учитани). Сваки број исписати у посебној линији.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	12
100	18
11	102
12	
18	
102	

Решење

Потребно је исписати само оне учитане бројеве који су дељиви са 3. Учитавање n бројева постижемо коришћењем петље (слично као што смо радили, на пример, у задатку Збир n бројева).

У овом задатку је природно да се користи петља `for`, мада је могуће користити и `while`. У телу петље учитавамо текући број и коришћењем наредбе гранања проверавамо да ли је дељив са 3. Проверу дељивости вршимо упоређивањем остатка при дељењу са 3 и нуле (како смо видели у задатку Збир година браће и сестре). Ако број јесте дељив са 3, исписујемо га.

Овај задатак је класичан пример тзв. алгоритма *филтрирања серије* тј. издвајања елемената који задовољавају неки дати услов. У општем случају у петљи пролазимо кроз елементе серије, наредбом гранања проверавамо да ли текући елемент задовољава задати услов, и ако задовољава у телу наредбе гранања га обрађујемо на одговарајући начин.

```
# ponavljamo n puta
n = int(input())
for i in range(n):
   # ucitavamo broj
   broj = int(input())
   # ako je deljiv sa 3, ispisujemo ga
   if (broj % 3 == 0):
      print(broj)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Бројање гласова за омиљеног глумца

Ученици су бирали свог омиљеног глумца. Напиши програм који Ђоки помаже да сазна колико је гласова добио његов омиљени глумац.

Улаз: Сваки глумац је означен природним бројем од 1 до 10. Прва линија стандардног улаза садржи редни број x Ђокиног омиљеног глумца. Друга линија стандардног улаза садржи природан број n ($1 \leq n \leq 100$) - број ученика у школи. Наредних n линија садрже гласове сваког ученика (бројеве од 1 до 10, сваки у посебном реду).

Излаз: На стандардни излаз исписати један природан број - број гласова које је добио глумац x.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 4 1 2 3 2	2

Решење

Број елемената филтриране серије

Потребно је избројати колико елемената серије задовољава неки дати услов (у овом случају услов је да су једнаки броју x). Уобичајени начин да се то уради је да се уведе бројач елемената који иницијализујемо на нулу (слично као у задатку Читање до нуле), да у петљи учитавамо један по један елемент серије и да ако елемент задовољава тражени услов увећавамо бројач за један.

Издвајање елемената који задовољавају дати услов (филтрирање) употребили смо и у задатку .

```
x = int(input())           # šifra omiljenog glumca
n = int(input())           # ukupan broj glasova
broj_glasova = 0           # broj glasova za omiljenog glumca
for i in range(n):         # analiziramo sve glasove
    y = int(input())
    if x == y:             # ako je tekući glas za omiljenog glumca,
        broj_glasova += 1  #     uvećavamo broj glasova
print(broj_glasova)        # ispisujemo broj glasova
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Просек одличних

Дате су просечне оцене n ученика једног одељења. Написати програм којим се одређује просек просечних оцена свих одличних ученика тог одељења.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број ученика. У наредних n линија налази се по један реалан број из интервала $[2, 5]$. Ти бројеви представљају просеке ученика.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати просек просечних оцена одличних ученика одељења заокружен на две децимале. Ако одличних ученика нема приказати `-`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
4 3.5 4.75 3 4.5	4.62

Пример 2

Улаз	*Излаз*
4 3.5 3.75 2.80 4.35	-

Решење

Овај задатак је веома сличан задатку Квалификациони праг. Кључна разлика је у томе што број ученика није унапред фиксиран, па је у решењу потребно употребити петљу у којој се учитавају и обрађују просеци појединачних ученика. Такође, постоји сличност са задатком јер је и у овом случају потребно међу свим учитаним елементима серије потребно анализирати само оне који задовољавају дати услов.

Просек просечних оцена одличних ученика одређујемо тако што збир просечних оцена одличних ученика поделимо бројем одличних ученика. Рачунање просека (аритметичке средине) серије произвољне дужине видели смо, на пример, у задатку Просек свих бројева до краја улаза, једина разлика је у томе што се у овом задатку не рачуна просек свих учитаних просечних оцена ученика, већ само оних који су одлични, тј. пре израчунавања просека серија се филтрира на основу услова да је просечна оцена већа или једнака 4.5.

Користимо променљиве у којима редом чувамо збир просека и број одличних ученика. На почетку обе променљиве постављамо на 0, јер у почетку још нисмо учитали ни један просек ученика. Затим у петљи редом

читамо просеке ученика и ако је ученик одличан (ако је текући просек већи од 4,5) додајемо његову просечну оцену збиру просека одличних док број одличних ученика увећавамо за 1. Кад смо прочитали просечне оцене свих ученика одељења, након петље, проверавамо да ли је број одличних ученика једнак нули и ако јесте приказујемо -, а иначе одређујемо просечну вредност просека одличних ученика дељењем вредности збира и броја одличних.

```
n = int(input())  # ukupan broj učenika
# učitavamo proseke svih učenika i određujemo broj odličnih učenika
# i zbir njihovih proseka
zbir_proseka_odlicnih = 0.0
broj_odlicnih = 0
for i in range(n):
   tekuci_prosek = float(input())
   if tekuci_prosek >= 4.5:
      zbir_proseka_odlicnih += tekuciProsek
      broj_odlicnih += 1
# odredjujemo i ispisujemo prosek proseka odlicnih ucenika
if broj_odlicnih != 0:
   print(format(zbir_proseka_odlicnih / broj_odlicnih, '.2f'))
else:
   print(”-”)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Категорије џудиста

На једном турниру џудисти се такмиче у три категорије: до 50 килограма, од 51 до 75 килограма и од 76 килограма навише. Напиши програм који учитава број џудиста једног клуба пријављеног на тај турнир, а затим тежину сваког од њих и за сваку категорију редом исписује колико ће се џудиста тог клуба борити у тој категорији.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број џудиста n ($1 \leq n \leq 100$), а затим у n наредних редова тежине џудиста (цели бројеви између 30 и 120).

Излаз: На стандардни излаз исписати три броја, сваки у посебном реду: број џудиста који имају мање или једнако од 50 килограма, број џудиста који имају између 51 и 75 килограма и број џудиста који имају више или једнако од 76 килограма.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 48 51 73 82 50	2 2 1

Решење

Основу задатка чини разврставање џудиста по категоријама (што можемо урадити гранањем на основу припадности интервалима, користећи `elif` као у задатку Агрегатно стање). Увешћемо три бројачке промењиве, сваку иницијализовати на нулу и повећавати за 1 сваки пут када наиђемо на џудисту у одговарајућој категорији. Дакле, разврставамо серију бројева на три подсерије (ово донекле одговара алгоритму филтрирања серије описаном у задатку) и израчунавамо број елемената сваке од три подсерије (као у задатку Читање до нуле).

```
# broj džudista u raznim kategorijama
broj_do_50 = 0
broj_od_51_do_75 = 0
broj_od_76 = 0
# ukupan broj džudista
n = int(input())
# učitavamo i analiziramo težine svih džudista
```

```
for i in range(n):
    tezina = int(input())
    if tezina <= 50:
        broj_do_50 += 1
    elif tezina <= 75:
        broj_od_51_do_75 += 1
    else:
        broj_od_76 += 1
# ispisujemo rezultate za svaku kategoriju
print(broj_do_50)
print(broj_od_51_do_75)
print(broj_od_76)
```

Задатак: Статистике33

Чувени кошаркаш Дабло Трипловић има толико добре статистике, да се већ помало сумња да су његови успеси добро пребројани.

Написати програм који одређује колико пута је Трипловић постигао такозвани трипл–дабл.

Улаз: На стандардноим улазу се у првом реду налази цео број N, $(1 \leq N \leq 100)$, број утакмица које је Трипловић одиграо у сезони. У сваком од следећих N редова по 3 цела броја раздвојена по једним размаком: број поена, скокова и асистенција редом (ови бројеви нису већи од 1000).

Излаз: На стандардни излаз исписати један број, број утакмица на којима је Трипловић постигао трипл–дабл.

Напомена

За потребе овог задатка трипл–дабл дефинишемо као најмање двоцифрен учинак (10 или више) у све три категорије које се прате. Другим речима: сва три броја већа од 9 у једном реду улаза.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 20 9 7 127 12 11 11 14 12	2

Задатак: Секција

У школи је велико интересовање за програмерску секцију, на којој ће се правити рачунарске игре. Наставник је поставио услов да на секцију могу да иду само они ученици који имају 5 из информатике и бар 4 из математике.

Написати програм који одређује колико ученика може да се пријави за секцију.

Улаз: у првом реду број N, број ученика заинтересованих за секцију, природан број не већи од 200. У сваком од следећих N редова низ оцена једног од заинтересованих ученика из свих 11 предмета редом, раздвојени по једним размаком. Оцена из математике је шеста, а из информатике девета у низу од 11 цифара.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број, број ученика који испуњавају услов.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
4 5 5 5 5 5 3 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5 4 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 2 2 2 2 2 5 2 2 5 2 2	2

Пример 2

Улаз	*Излаз*
2 5 5 5 5 5 5 5 5 4 5 5 5 5 5 5 5 3 5 5 5 5 5	0

Задатак: Купци

Менаџер једног великог ланца продавница жели да зна структуру прихода. Он је зато све куповине разврстао у мале, средње и велике на следећи начин: ако је износ рачуна за неку куповину X, та куповина се сматра за

малу ако је $X \leq M$, за средњу ако је $M < X \leq V$, а за велику ако је $V < X$. Менаџер жели да за посматрани период зна колики је укупан приход продавница од малих, средњих и велилких куповина редом.

Улаз: Са стандардног улаза се у првом реду учитавају бројеви M и V ($1 \leq M < V \leq 100000$). У другом реду је цео број n, укупан број куповина у свим продавницама у посматраном периоду ($1 \leq n \leq 50$). У трећем и последњем реду су износи рачуна за n куповина, цели позитивни бројеви до 200000 раздвојени по једним размаком.

Излаз: Три цела броја, сваки у посебном реду. Ови бројеви су укупни приходи од малих, средњих и великих куповина.

Пример

Улаз	*Излаз*
`100 1000`	`188`
`5`	`512`
`88 1010 512 100 2500`	`3510`

4.2.7 Минимум и максимум

У задацима који следе биће приказано израчунавање највећег и најмањег елемента серије (минимума и максимума), њихове позиције и још неких варијација ових алгоритама (на пример, проналажење другог елемента по величини). Нагласак ће бити стављен и на примену ових статистика у решавању конкретних проблема.

Задатак: Најнижа температура

Дате су температуре у неколико градова. Написати програм којим се одређује, колика је температура у најхладнијем граду.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број n ($3 \leq n \leq 50$) који представља број градова, а у свакој од наредних n линија налази се цео број t ($-20 \leq t \leq 40$) који представља температуру у одговарајућем граду.

Излаз: На стандардном излазу, у једној линији, приказати температуру у најхладнијем граду.

Пример

Улаз	*Излаз*

`5`
`10`
`-12`
`22`
`-13`
`15`
	`-13`

Решење

Одређивање екстремне вредности (минимума тј. максимума) разматрали смо у случају малих серија са фиксираним бројем елемената (на пример, у задатку Најлошији контролни одређивали смо најмањи од пет датих бројева).

У решењу овог задатка применићемо уобичајени алгоритам за одређивање минимума који смо тада описали, при чему ћемо, пошто број елемената серије није унапред фиксиран, елементе учитавати и обрађивати у петљи. Током извршавања алгоритма одржаваћемо вредност текућег минимума тј. најмању од свих до тада учитаних температура. Ту вредност можемо иницијализовати на први прочитани елемент серије тј. на температуру у првом граду. Затим, у сваком проласку кроз петљу читамо температуру у следећем граду и проверавамо да ли је њена вредност мања од текућег минимума. Ако јесте, ажурирамо вредност текућег минимума и постављамо га на температуру учитану у том кораку. На крају, када се учитају и обраде сви елементи серије, вредност текућег минимума биће уједно и вредност минимума целе серије тј. најнижа температура у свим градовима.

```
n = int(input())       # broj gradova
t = int(input())       # temperatura u prvom gradu
min_t = t              # najniža od svih do sada učitanih temperatura
for i in range(1, n):  # ponavljamo za sve preostale gradove
    t = int(input())   #   temperatura u tekucem gradu
    if t < min_t:      #    ako je ona niža od najniže
```

```
        min_t = t      #       ažuriramo najnižu temperaturu
print(min_t)           # ispisujemo konacni rezultat
```

Уместо гранања могуће је у сваком кораку петље користити и функцију за одређивање минимума два броја. У језику Пајтон се може употребити функција `min`.

```
n = int(input())         # broj gradova
t = int(input())         # temperatura u tekućem gradu
min_t = t                # najniža od svih do sada učitanih temperatura
for i in range(1, n):    # ponavljamo za sve preostale gradove
   t = int(input())      #   temperatura u tekućem gradu
   min_t = min(min_t, t) #   ažuriramo vrednost najnize temperature
print(min_t)             # ispisujemo konačni rezultat
```

Иницијализација

У претходно описаном решењу температура у првом граду учитава се пре почетка петље, а у петљи се учитавају вредности температура у преосталих $n - 1$ градова. Издвајање обраде прве температуре испред петље можемо избећи тако што ћемо пре уласка у петљу текући минимум иницијализовати на вредност $+\infty$ која је сигурно већа од прве учитане вредности. Пошто ту вредност није могуће представити у програму, уместо ње можемо употребити вредност `sys.maxsize` (за то је на почетку програма потребно навести `import sys`).

Већ код обраде температуре у првом граду текући ће минимум бити постављен на вредност температуре у том граду (јер је свака вредност мања или једнака од почетне).

```
import sys
n = int(input())     # broj gradova
min_t = sys.maxsize  # najniža od svih do sada učitanih temperatura
for i in range(n):   # ponavljamo za sve preostale gradove
   t = int(input())  #   temperatura u tekućem gradu
   if t < min_t:     #   ako je ona niža od najnize
      min_t = t      #      ažuriramo najnižu temperaturu
print(min_t)         # ispisujemo konačni rezultat
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Најтоплији дан

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Пошто је седам прилично велики број, алгоритам за одређивање позиције максимума има пуно понављања (практично копирања и лепљења истих наредби, уз мале измене). Боље решење се може добити уз употребу петљи.

```
# podaci za prvi dan - ponedeljak
t = int(input())  # tekuća temperatura
rbr = 1           # redni broj tekućeg dana

maxT = t          # najviša temperatura
rbrMax = rbr      # redni broj dana sa najvišom temperaturom
for rbr in range(2, 8):  # obrađujemo dane od utorka do nedelje
    t = int(input())     #   učitavamo tekuću temperaturu
    if t > maxT:         #   ako je dan topliji od najtoplijeg
        maxT = t         #     ažuriramo najvišu temperaturu
        rbrMax = rbr     #     i redni broj najtoplijeg dana

print(rbrMax)     # ispisujemo traženi redni broj
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Просек скокова

Марко је велики обожаватељ скокова у воду и не пропушта ниједно такмичење. Скок се оцењује тако што сваки од n судија донесе своју оцену, а затим се најслабија и најбоља оцена одбаце и одреди се просек преосталих оцена. Написати програм којим се одређује Марков резултат на основу судијских оцена.

Улаз: У n ($2 < n \leq 10$) линија стандардног улаза налази се по један цео број из интервала $[0, 10]$, ти бројеви представљају оцене које је Марко добио. Након тога долази крај улаза (он се може унети помоћу `ctrl + z` у системима Windows или `ctrl + d` у системима Linux).

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати, на две децимале, Марков резултат.

Пример

Улаз	*Излаз*
8	8.00
7	
9	
9	
5	

Решење

Минимум и максимум

Слично задатку Најлошији контролни, резултат можемо добити тако што одредимо збир свих оцена, број унетих оцена, одредимо најмању и највећу оцену, па од добијеног збира одузмемо најмању и највећи оцену и одредимо просек. Разлика је у томе што у овом задатку број оцена није фиксиран и за рачунање збира, минимума и максимума користимо петље (збир рачунамо исто као у задатку Збир n бројева, број као у задатку Читање до краја улаза, а минимум и максимум аналогно задатку Најнижа температура).

```
import sys

ocena = int(input())   # ucitavamo prvu ocenu
broj = 1;              # broj svih ocena
zbir = ocena           # zbir svih ocena
min = ocena            # najmanja ocena
max = ocena            # najveca ocena

# obradjujemo sve ostale ocene
for linija in sys.stdin:
    ocena = int(linija)  # ucitavamo tekucu ocenu
    # azuriramo broj, zbir, minimum i maksimum
    broj = broj + 1
    zbir += ocena;
    if ocena < min:
        min = ocena
    elif ocena > max:
        max = ocena

# izracunavamo i ispisujemo prosek preostalih ocena
prosek = (zbir - min - max) / (broj-2)
print(format(prosek, '.2f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Најближи датом целом броју

Ученици једног одељења су организовали наградну игру. Победник игре је онај ученик који што боље процени колико метара је дугачка њихова учионица. Ако су две процене такве да за исти износ потцењују тј. прецењују дужину учионице, победник је онај ко је дао већу процену.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се цео број x ($10 \leq x \leq 20$), стварна дужина учионице, у другој линији природан број n ($3 \leq n \leq 30$) који представља број ученика, док следећих n линија садрже различите реалне бројеве x_i ($5 \leq x_i \leq 30$) који представљају процене ученика.

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати, највећи број међу учитаним реалним бројевима који је најближи броју x (заокружен на две децимале).

Пример

Улаз	*Излаз*
13.0 4 12.4 8.4 13.6 7.5	13.60

Решење

Растојање између два броја једнако је њиховој апсолутној разлици. Две процене ученика се пореде тако што се прво упореди њихово растојање до тачне вредности x, а ако су оне једнаке, онда се пореде по величини. Приметимо да се овде ради о лексикографском поретку који смо увели и анализирали у задатку Пунолетство. Број a представља бољу процену од броја b ако и само ако важи $|a-x| < |b-x|$ или ако је $|a-x| = |b-x|$ и $a > b$.

Дакле, потребно је пронаћи максималну вредност међу бројевима који се пореде не само на основу величине, већ на основу описане релације лексикографског поретка. То је могуће урадити модификацијом алгоритма за одређивања максимума тј. минимума серије бројева који смо приказали у задатку Најнижа температура. Једина разлика је то што ћемо приликом поређења вредности тренутно учитаног броја са тренутном вредношћу минимума, уместо обичне примене релације < применити описани лексикографски поредак. Поредак можемо реализовати у засебној функцији.

```
# provera da li je x1 bolja procena broja x nego broj x2
def bolja_procena(x1, x2, x):
    if abs(x1 - x) < abs(x2 - x):
        return True
    if abs(x1 - x) == abs(x2 - x) and x1 > x2:
        return True
    return False

x = float(input())    # dati broj
n = int(input())      # broj elemenata serije
broj = float(input()) # ucitavamo prvi element serije
# proglasavamo ga za trenutno najblizi broj broju x
najblizi_broj = broj
for i in range(1, n): # obradjujemo ostale elemente serije
    broj = float(input()) # ucitavamo naredni element
    # ako je on bolja procena od trenutno najblizeg
    if bolja_procena(broj, najblizi_broj, x):
        najblizi_broj = broj # azuriramo trenutno najblizi broj

print(format(najblizi_broj, '.2f')) # prijavlujemo rezultat
```

Поређење можемо реализовати и једним сложеним логичким изразом којим се врши лексикографско поређење.

```
x = float(input())     # dati ceo broj
n = int(input())       # broj elemenata serije
broj = float(input())  # ucitavamo prvi element serije
# proglašavamo ga za trenutno najblizi broj broju x
najblizi_broj = broj; najmanje_rastojanje = abs(x - najblizi_broj)
for i in range(1, n):  # za ostale elemente serije
    # ucitavamo naredni element i racunamo njegovo rastojanje
    broj = float(input()); rastojanje = abs(x - broj)
    # ako je on blizi broju x od trenutno najblizeg ili je na istom
    # rastojanju od x kao trenutno najblizi, ali je veci od njega
    if rastojanje < najmanje_rastojanje or \
```

```
        rastojanje == najmanje_rastojanje and broj > najblizi_broj:
        # azuriramo trenutno najblizi broj i najmanje rastojanje
        najblizi_broj = broj; najmanje_rastojanje = rastojanje
print(format(najblizi_broj, '.2f'))  # prikazujemo rezultat
```

Задатак: Број максималних

На такмичењу из математике учествује n ученика. За сваког такмичара познат је број поена које је освојио на такмичењу. Написати програм којим се одређује број такмичара који су постигли најбољи резултат на такмичењу.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($10 \leq n \leq 250$) који представља број ученика. У наредних n линија налази се по један цео број из интервала $[0, 100]$, ти бројеви представљају поене које су такмичари освојили.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати укупан број такмичара који су постигли најбољи резултат на такмичењу.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 57 90 68 90 73	2

Решење

У овом задатку комбинује се одређивање максимумума серије елемената (што радимо на уобичајени начин, слично као у задатку Најнижа температура) и број појављивања неког елемента у серији (што радимо и у задатку Бројање гласова за омиљеног глумца).

Имплементација алгоритама за бројање појављивања максимума

Кључни увид који нам омогућава да задатак решимо само једним пролазом кроз елементе серије и да их не морамо памтити истовремено у меморији је то да се максимум у низу јавља онолико пута колико се јавља и у делу низа од првог свог појављивања па до краја. Дакле, када наиђемо на елемент који је максимум до тада обрађеног дела низа, он постаје нови кандидат за глобални максимум и од те тачке надаље бројимо његова појављивања (ако је строго већи од претходног кандидата за максимум, сигурни смо да се до ове тачке раније није јављао).

Да бисмо одредили број такмичара са најбољим резултатом морамо одредити и вредност најбољег резултата. Током рада програма ћемо у једној променљивој чувати максимум свих до сада учитаних поена такмичара, док ће друга променљива чувати број појављивања те највеће вредности међу до сада учитаним поенима такмичара. Максимум ћемо иницијализовати на вредност поена првог учитаног такмичара, док ћемо број његових појављивања иницијализовати на 1. Затим ћемо учитавати и анализирати поене осталих такмичара. Приликом анализе броја поена ученика могућа су три случаја:

- број поена је строго већи од текућег максимума, и у том случају се поставља нови текући максимум и његов број појављивања се поставља на 1;
- број поена је једнак текућем максимуму, и у том случају се његов број појављивања повећава за 1;
- број поена је мањи од текућег максимума, у ком случају се не предузима никаква акција.

```
n = int(input())     # broj takmičara
poeni = int(input()) # učitavamo poene prvog takmicara
maks = poeni   # najveći dosadašnji broj poena
broj_maks = 1  # broj dosadašnjih pojavljivanja tog maksimuma
for i in range(1, n): # za sve preostale takmičare
    poeni = int(input())  # učitavamo poene narednog takmicara
    if poeni > maks:  # ako je on bolji od do sada najboljeg
        # ovo je prvo i jedino pojavljivanje novog maksimuma
        maks = poeni; broj_maks = 1
```

```
    elif poeni == maks: # ako on ima isto poena kao do sada najbolji
        # ovo je novo pojavljivanje dosadasnjeg maksimuma
        broj_max += 1
print(broj_max) # prijavljujemo rezultat
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Други на ранг листи

На основу резултата такмичењу на којем је учествовало N ученика формирана је ранг листа. Ранг листа се формира у нерастућем поретку по резултатима, од најбољег до најлошијег резултата. Написати програм којим се одређује број поена такмичара који је други на ранг листи.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број N ($1 \leq N \leq 50000$) који представља број такмичара. У свакој од наредних N линија налази се цео број из интервала $[0, 50000]$, ти бројеви представљају резултате такмичара, који нису сортирани по поенима, већ по бројевима рачунара за којима су такмичари седели.

Излаз: У једној линији стандардног излаза приказати број поена другог такмичара на ранг листи.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 80 95 75 50 95	95

Решење

Задатак можемо решити тако што пратимо текућу највећу вредност и другу вредност на ранг листи међу учитаним бројевима (слично као у задатку Друга вредност по величини). Читамо један по један број и упоређујемо га са текућим вредностима прва два елемента.

- Ако је учитани број строго већи од вредности текућег максимума, друга вредност на ранг листи добија вредност текућег максимума, а текући максимум постаје број који смо учитали.
- Иначе, ако је учитани број (строго) већи од текуће друге вредности на ранг листи, коригујемо другу вредност на ранг листи.

Остаје питање како иницијално поставити ове две вредности (наизглед није јасно које су вредности првог и другог елемента по реду у празном или једночланом скупу). Најприроднији начин је да се учитају два елемента, да се упореде и да се на основу њиховог редоследа изврши иницијализација. Међутим, слично као и у случају одређивања једног максимума, можемо употребити иницијализацију на неку специјалну вредност која има улогу вредности $-\infty$. Пошто су учитани бројеви су из интервала $[0, 100]$, можемо иницијализовати обе вредности на -1. Заиста, након учитавања првог броја, он ће сигурно бити већи од -1 (вредности првог максимума), па ће вредност првог елемента на ранг-листи бити постављена на њега, а вредност другог елемента на ранг-лист на -1. Након учитавања другог елемента он ће бити или већи од првог елемента на ранг-листи и тада се вредност првог елемента на ранг-листи поставити на тај, други по реду учитани број, а вредност другог елемента на ранг-листи постаће једнака вредности првог учитаног броја, или ће бити мањи од првог елемента на ранг-листи, али ће бити строго већи од -1, па ће вредности првог и другог елемента на ранг листи бити редом први и други учитани број. Могуће је употребити и вредност `-sys.maxsize-1` (уз укључивање модула `sys` на почетку програма).

```
n = int(input()) # broj elemenata serije
# prvi i drugi maksimum inicijalizujemo na -beskonačno
prvi_max = -1; drugi_max = -1
for i in range(0, n):
    x = int(input())  # učitavamo novi element serije
    # ako je potrebno ažuriramo vrednosti maksimuma
    if x > prvi_max:
        drugi_max = prvi_max
        prvi_max = x
```

```
    elif x > drugi_max:
        drugi_max = x
print(drugi_max) # ispisujemo vrednost drugog maksimuma
```

(Парцијално) сортирање

Овај задатак тражи да се одреди k-ти по величини у серији елемената (некада се овај проблем назива проблем ранговских статистика). Један начин да се то уради је да се елементи сместе у низ и сортирају (као у задатку Сортирање бројева) и да се онда испише k-ти по реду у сортираном низу. Сортирање целог низа је често вишак посла (да би се одредио други елемент по величини у сортираном низу, јасно је да није, на пример, потребно прецизно одредити међусобни редослед последња два елемента) и оно доводи до мало неефикаснијег решења. За решавање проблема ранговских статистика смишљени су алгоритми тзв. парцијалног сортирања низа (нпр. алгоритам QuickSelect о којем ће више речи бити у другом делу ове збирке).

Задатак се може решити и дефинисањем рекурзивне функције која одређује највећа два елемента у низу. Ако је низ празан, резултат треба поставити на $(-\infty, -\infty)$, јер је $-\infty$ неутрални елемент за операцију максимума. Пошто су у задатку сви бројеви позитивни, уместо вредности $-\infty$ коју обично не подржавају програмски језици, можемо употребити $(-1, -1)$. Ако низ није празан, рекурзивно проналазимо први и други максимум првих $n-1$ елемената низа и затим учитавамо последњи елемент. Ако је тај последњи елемент већи од првог максимума префикса, тада је он први максимум целог низа, а први максимум префикса је други максимум целог низа. У супротном, ако је последњи елемент низа већи од другог максимума префикса, тада је први максимум префикса уједно и први максимум целог низа, док је други максимум целог низа последњи елемент x. У супротном, први и други максимум целог низа се поклапају са првим и другим максимумом префикса.

```
# ucitava n elemenata i odredjuje i vraca najveca dva
def dva_najveca(n):
    if n == 0:
        return (-1, -1)

    (prvi, drugi) = dva_najveca(n-1)
    x = int(input())
    if x > prvi:
        return (x, prvi)
    elif x > drugi:
        return (prvi, x)
    else:
        return (prvi, drugi)


# broj elemenata serije
n = int(input())
(prvi, drugi) = dva_najveca(n)
# ispisujemo vrednost drugog maksimuma
print(drugi)
```

Задатак можемо решити и репном рекурзијом (коју неки компилатори аутоматски оптимизују и претварају у итерацију). Дефинисаћемо рекурзивну функцију која прима два највећа елемента у делу низа који је обрађен пре позива те функције и број n преосталих елемената које треба обрадити. Ако је $n = 0$ цео низ је обрађен и функција може да врати дотадашњих други елемент по величини. У супротном, учитава се наредни елемент x и врши се рекурзивни позив за преосталих $n - 1$ елемената низа, при чему се по потреби ажурирају два до тада највећа елемента. Ако је учитани елемент x већи од дотадашњег првог максимума, онда је он нови први максимум, а дотадашњи први максимум је нови други максимум. У супротном, ако је учитани елемент x већи од дотадашњег другог максимума, тада се први максимум не мења, а елемент x постаје нови други максимум. У супротном се не мењају ни први ни други максимум.

```
def drugi(n):
    def drugi_(n, prviMaks, drugiMaks):
        if n == 0:
            return drugiMaks
        x = int(input())
        if x > prviMaks:
```

```
            return drugi_(n-1, x, prviMaks)
        elif x > drugiMaks:
            return drugi_(n-1, prviMaks, x)
        else:
            return drugi_(n-1, prviMaks, drugiMaks)

    return drugi_(n, -1, -1)

# broj elemenata serije
n = int(input());

# ispisujemo vrednost drugog maksimuma
print(drugi(n))
```

Задатак: Друга вредност по величини

У студентском удружењу се организује наградна игра. Договор је да награде добијају два члана удружења која имају највеће бројеве индекса. Проблем је у томе што су на постојећем списку неки студенти уписани и више пута. Написати програм који на основу серије бројева индекса са тог списка одређује два награђена студента.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број N ($10 \leq N \leq 50000$) који представља број студената на списку. Свака од наредних N линија садржи по један природан број из интервала $[1, 50000]$, који представља број индекса студената из удружења. Може се претпоставити да ће на списку постојати бар два различита индекса.

Излаз: На стандардном излазу приказати индексе два награђена студента. У првом реду највећу, а у другом реду следећу по величини вредност међу бројевима индекса.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	71
22	35
35	
71	
71	
22	

Решење

Сортирање

Одређивање другог по величини у серији од n целих бројева, можемо решити уређивањем бројева од највећег до најмањег. После уређења бројева највећи број је број x_1, а други по величини је следећи број из уређене серије који је различит од x_1. Ако такав број не постоји сви бројеви су једнаки. За разлику од задатка Други на ранг листи у овом случају до решења није могуће доћи једноставном применом парцијалног сортирања, јер не знамо на ком месту се у сортираном редоследу налази елемент који тражимо.

Алгоритам одређивања два максимума

Задатак можемо решити модификацијом класичног поступка одређивања максималног елемента серије (који је описан у задатку Најнижа температура), слично као у задатку Други на ранг листи. Претпоставимо опет да знамо прву и другу вредност по величини (назовимо их првим и другим максимумом) у до сада обрађеном делу низа и размотримо како их ажурирати када се учита нови број.

- Ако је учитани број строго већи од текуће вредности првог максимума, други максимум треба поставити на текућу вредност првог максимума, а први максимум треба поставити на учитани број.
- Ако је учитани број мањи од текуће вредности првог максимума потребно га је упоредити са другим максимумом и ако је (строго) већи од текуће вредности другог максимума, потребно је други максимум поставити на учитани број.
- Ако је учитани број једнак текућој вредности првог максимума, не радимо ништа.

Поново је проблематично питање иницијализације првог и другог максимума.

Почетну вредност оба максимума можемо поставити на неку вештачку вредност која има улогу вредности $-\infty$ (то је обично најмања вредност целобројног типа, а у нашем задатку, пошто је допуштени интервал вредности $[1, 1000]$, може се употребити 0 или -1). Уз овакву иницијализацију, све елементе можемо обрадити на начин који смо на почетку описали. После првог учитаног броја догодиће се да је он сигурно већи од првог максимума и тада ће вредност другог максимума постати стара вредност првог максимума (то је број који представља $-\infty$), док ће први максимум бити постављен на учитани број. Наредна промена ће се десити када се учита први елемент у серији који је различит од првог. Ако је строго већи од првог максимума, први максимум ће бити постављен на вредност тог броја, а други максимум на вредност првог учитаног броја, што су управо коректне иницијалне вредности за део серије који је до сада учитан. Ако је учитани елемент строго мањи од првог максимума, тада ће он остати непромењен, али ће други максимум бити постављен на тај учитани број и опет ће те две вредности бити коректно иницијализоване у односу на део серије који је до сада учитан.

```
n = int(input()) # broj elemenata serije
prvi_max = int(input()) # prvi maksimum inicijalizujemo na prvi element
drugi_max = -1          # drugi maksimum inicjalizujemo na -beskonačno
for i in range(1, n):   # obrađujemo sve naredne elemente
    x = int(input())    #   učitavamo naredni element serije
    # ako je potrebno, ažuriramo vrednosti maksimuma
    if x > prvi_max:
        drugi_max = prvi_max
        prvi_max = x
    elif x < prvi_max:
        if (x > drugi_max):
            drugi_max = x
  # elif x == prvi_max:
  #     ne radimo ništa
# ispisujemo vrednosti prvog i drugog maksimuma
print(prvi_max)
print(drugi_max)
```

Задатак: Победник у три дисциплине

Такмичари су радили тестове из програмирања, математике и физике. За сваки предмет добили су одређени број поена (цео број од 0 до 50). Такмичари се рангирају по укупном броју поена из сва три предмета. Ако два такмичара имају исти број поена, победник је онај који има више поена из програмирања. Ако је и број поена из програмирања једнак, онда се посматра број поена из математике. На крају, ако је и број поена из математике једнак, посматра се број поена из физике. Потребно је написати програм који одређује победника такмичења.

Улаз: Учитава се прво број такмичара, а затим и подаци за сваког такмичара. За сваког такмичара учитава се број поена из програмирања, а затим број поена из математике, и на крају број поена из физике, сви у истом реду.

Излаз: Потребно је исписати редни број победника и број његових поена из сваког предмета. Бројање такмичара почиње од 1. Ако су два или више такмичара остварила потпуно идентичан успех, победник је онај који има мањи редни број (јер је остварио више поена на квалификационом такмичењу).

Пример

Улаз	*Излаз*
4 20 30 40 10 20 30 20 40 30 10 50 20	3: 20 40 30

Решење

У овом задатку је потребно одредити максимум серије елемената и његову позицију у серији, при чему су ти елементи сложеног типа (поени из три предмета) и релација поретка над њима је дефинисана на начин дефинисан условима задатка. Када мало боље размотримо дефиницију поретка између такмичара приметићемо

да је у питању лексикографски поредак, сличан ономе коришћеном у задацима Пунолетство и Најбољи у две дисциплине.

Приметимо да за одређивање победника није неопходно истовремено памтити податке о свим такмичарима, већ је могуће истовремено учитавати податке и одређивати максимум применом уобичајеног алгоритма за одређивања максимума тј. минимума (описаног у задатку Најнижа температура).

Једно од основних питања у имплементацији решења је питање како представити податке о такмичару.

Посебне променљиве

Најелементарније решење је оно у којем се подаци представљају помоћу три посебне променљиве (по једна за поене из свака три предмета). У том случају дефинишемо функцију која прима 6 параметара (податке о два такмичара) и која проверава да ли је један такмичар бољи од другог (тј. да ли је други лошији од првог). Функција два такмичара пореди лексикографски, проверавајући редом један по један критеријум (прво укупан број поена, а онда, ако је укупан број поена једна, број поена из програмирања, затим математике и на крају из физике). Сличне функције приказане су и у задацима Пунолетство и Најбољи у две дисциплине. Када је дефинисана релација (тј. буловска функција) поретка, победник се одређује алгоритмом за одређивање максимума и његове позиције, који је приказан у задацима Најтоплији дан и Редни број максимума. Памтићемо број поена и редни број победника, прогласићемо првог такмичара за победника, а затим редом обрађивати остале такмичаре, и ако је дотадашњи кандидат за победника лошији од текућег такмичара, ажурираћемо податке о победнику.

```
# funkcija koja proverava da li je takmicar A losiji od takmicara B
def losiji(progA, matA, fizA, progB, matB, fizB):
    # prvo se poredi ukupan broj poena
    ukupnoA = progA + matA + fizA
    ukupnoB = progB + matB + fizB
    if ukupnoA < ukupnoB:
        return True
    if ukupnoA > ukupnoB:
        return False
    # ukupan broj poena je jednak, pa se porede poeni iz programiranja
    if progA < progB:
        return True
    if progA > progB:
        return False
    # i ukupan broj poena iz programiranja je jednak,
    # pa se porede poeni iz matematike
    if matA < matB:
        return True
    if matA > matB:
        return False
    # i ukupan broj poena iz matematika je jednak,
    # pa se porede poeni iz fizike
    return fizA < fizB

# funkcija koja ucitava poene takmicara iz jedne linije
def ucitajTakmicara():
    prog_str, mat_str, fiz_str = input().split()
    return int(prog_str), int(mat_str), int(fiz_str)

# funkcija koja prikazuje poene takmicara
def prikaziTakmicara(prog, mat, fiz):
    print(prog, mat, fiz)

# ucitavamo broj takmicara
brojTakmicara = int(input())

# prog, mat, fiz - poeni tekuceg takmicar
# progPobednik, matPobednik, fizPobednik - poeni pobednika
```

```
# brojPobednika - redni broj pobednika

# ucitavamo podatke i istovremeno odredjujemo poziciju najveceg elementa,
# kada se poredjenje vrsi u odnosu na relaciju "losiji"

# ucitavamo poene prvog takmicara
(prog, mat, fiz) = ucitajTakmicara()
# pretpostavljamo da je prvi takmicar pobednik
(progPobednik, matPobednik, fizPobednik) = (prog, mat, fiz)
brojPobednika = 1
for i in range(2, brojTakmicara+1):
    # Ucitavamo poene tekuceg takmicara
    (prog, mat, fiz) = ucitajTakmicara()
    # Ako je dosadasnji pobednik losiji od tekuceg takmicara
    if losiji(progPobednik, matPobednik, fizPobednik, prog, mat, fiz):
        # Za pobednika proglasavamo tekuceg takmicara
        (progPobednik, matPobednik, fizPobednik) = (prog, mat, fiz)
        brojPobednika = i

# Prijavljujemo rezultat
print(brojPobednika, ": ", end="")
prikaziTakmicara(progPobednik, matPobednik, fizPobednik);
```

Задатак: Најмањи круг

За дати низ тачака у равни одредити полупречник најмањег круга, са центром у координатном почетку, који садржи све дате тачке.

Улаз: Са стандардног улаза у првој линији се уноси природан број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број тачака у равни, а у наредних n линија у свакој линији по два реалана броја (од -1000 до 1000), који представљају координате x и y тачке у равни.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број (допуштена је толеранција грешке 10^{-5}) - полупречник најмањег круга са центром у координатном почетку, који садржи све учитане тачке.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 2.6 3.4 1.2 6.7 3.33 5.55 2.57 3.44	6.80661

Задатак: Редни број максимума

На аукцији неке слике учествује n купаца. Сваки купац је понудио извесни износ новца и сви купци су понудили различите износе. Написати програм којим се одређује редни број купца који је понудио највећи износ.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($1 \leq n \leq 1000$) који представља број купаца. У наредних n линија налази се по један позитиван реалан број, ти бројеви представљају износе новца коју су понудио купци редом.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати редни број купца који је понудио највећи износ новца.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 123.23 234.45 100.23 345.00 128.80	4

4.2.8 Линеарна претрага

Претрага подразумева испитивање да ли постоји елемент серије који задовољава неки дати услов. Такође, можемо проверавати да ли сви елементи задовољавају услов, одређивати позицију првог или последњег елемента који задовољава услов и слично. Поред самог алгоритма линеарне претраге приказаћемо и његову примену у решавању неколико конкрентних задатака.

Задатак: Негативан број

Написати програм којим се проверава да ли међу учитаним бројевима постоји негативан број.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број бројева. Свака од наредних n линија садржи по један реалан број.

Излаз: На стандарном излазу у једној линији исписти `da` ако међу учитаним бројевима постоји негативан број, иначе исписати `ne`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`5`	`da`
`10.89`	
`12.349`	
`-5.9`	
`2.3`	
`-2.45`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`4`	`ne`
`100.89`	
`12.349`	
`0`	
`2.3`	

Решење

Коришћење логичке променљиве

Потребно је испитати да ли међу учитаним бројевима постоји неки који је негативан. Логичком променљивом можемо пратити да ли смо учитали неки негативан број. Пошто на почетку нисмо још учитали ни један број, нисмо видели ни један негативан, и на почетку вредност логичке променљиве поставимо на `False`. Затим у петљи редом учитавамо бројеве и за сваки број проверавамо да ли је негативан. Ако је тренутно учитани број негативан вредност логичке променљиве поставимо на `True` (јер сада знамо да међу до сада учитаним бројевима постоји један који је негативан). После читања свих бројева, на основу вредности логичке променљиве исписујемо одговарајућу поруку.

```
postoji = False
for i in range(n):
    # ucitaj x
    if x < 0:
        postoji = True
```

Једна честа грешка

Нагласимо да је честа грешка да се унутар петље провери да ли је тренутно учитани број негативан и да се ако јесте вредност логичке променљиве постави на `True`, а да се у супротном она постави на `False`.

```
postoji = False;
for i in range(n):
    # ucitaj x
    if x < 0:
        postoji = True
    else:
        postoji = False
```

или (са истим ефектом)

```
postoji = False
for i in range(n):
    # ucitaj x
    postoji = x < 0
```

Наилазак на негативан број одређује дефинитивно да у серији постоје негативни бројеви, док наилазак на ненегативни број не указује на то да су у серији сви бројеви ненегативни (зато грану `else` не треба писати). Исправно решење може бити следеће.

```
n = int(input())  # broj elemenata

postoji_negativan = False  # da li među učitanim postoji negativan
for i in range(n):               # obrađujemo n elemenata
    x = float(input())           # učitavamo element
    if x < 0:                    # ako je on negativan,
        postoji_negativan = True # onda među učitanim postoji negativan
print("da" if postoji_negativan else "ne") # ispisujemo rezultat
```

Рани прекид

Приметимо да читање бројева можемо прекинути када прочитамо први негативан број тј. када вредност логичке променљиве постане `True`, јер тада знамо да међу бројевима постоји негативан број. Према томе читамо бројеве и проверавамо да ли је учитани број негативан, док не прочитамо све бројеве и док је вредност логиче променљиве `False`. Нагласимо да овакав ранији прекид петље не би био могућ да је у неком случају било потребно учитати све бројеве. Рани прекид петље можемо остварити на различите начине.

Један је да се услов петље ојача условом да је вредност логичке променљиве једнака `False` (на пример, да се тражи да је `i < n and not postoji`). Наравно, у том случају уместо петље `for` морамо употребити петљу `while`.

```
n = int(input())
postoji_negativan = False
i = 0
while i < n and (not postoji_negativan):
    x = float(input())
    if x < 0:
        postoji_negativan = True
    i = i + 1
```

Један начин да се оствари рани прекид приликом постављања логичке променљиве на `True` је да се употреби наредба `break`.

```
n = int(input())
postoji_negativan = False
for i in range(0, n):
    x = float(input())
    if x < 0:
        postoji_negativan = True
        break
```

Ако би се учитавање и провера вршили у засебној функцији, тада би се приликом наилажења на негативан елемент могла употребити и наредба `return True` (тада не би било потребе за посебном логичком променљивом), док би се након петље употребила наредба `return False`.

```
def postoji_negativan():
    n = int(input())
    for i in range(n):
        x = float(input())
        if x < 0:
            return True
    return False

if postoji_negativan():
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Задатак можемо решити и без коришћења логичке променљиве. У петљи читамо број по број, и ако је учитани

број негативан прекинемо извршавање петље коришћењем наредбе `break`. После завршетка петље на основу вредности бројачке промењиве можемо закључити да ли је међу учитаним бројевима постојао негативан број. Ако је бројачка промењива имала почетну вредност 0 и ако је после завршетка петље њена вредност мања од n онда је петља завршена пре читања свих бројева, према томе постоји негативан број међу учитаним бројевима. Слично ако је почетна вредност бројачке промењиве 1 и ако је после завршетка петље њена вредност мања или једнака n, постојао је негативан број међу учитаним бројевима.

```
n = int(input())
i = 0
while i < n:
    x = float(input())
    if x < 0:
        break
    i = i + 1
print("da" if i < n else "ne")
```

Задатак можемо решити и дефинисањем рекурзивне функције која учитава n бројева и проверава да ли међу њима постоји неки негативан. Ако је $n = 0$, тада нема бројева, па самим тим нема ни негативних. У супротном учитавамо први број. Негативних бројева у низу има ако и само ако је тај први број негативан или ако има негативних бројева међу наредних $n - 1$ елемената низа (што можемо установити рекурзивним позивом).

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Дељив бројевима од 1 до n

Написати програм којим се проверава да ли је дати природан број k дељив свим природним бројевима од 1 до n.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број k ($0 < k \leq 10^9$), а друга линија садржи природан број n ($1 \leq n \leq 10$).

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати реч `da` ако је број k дељив свим природним бројевима од 1 до n, иначе приказати реч `ne`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`60`	`da`
`6`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`90`	`ne`
`5`	

Решење

За сваки број од 1 до n треба проверити да ли дели дати број k.

Задатак се решава линеарном претрагом, на веома сличан начин као у задатку Негативан број. Разлика је то што је тамо проверавамо да ли у серији постоји неки елемент који задовољава дати услов, док се у овом задатку тражи да се провери да ли сви елементи у серији задовољавају дати услов. То је, међутим, веома слично, јер се испитивање да ли сви елементи задовољавају неки услов тривијално своди на испитивање да ли постоји неки елемент који не задовољава тај услов.

У петљи обилазимо серију делилаца тј. имплементирамо бројачку петљу у којој бројачка промењива узима вредности од 1 до n. Можемо увести логичку промењиву `deljiv` која има вредност `True` ако је број k дељив свим бројевима који су у тој петљи обрађени, а иначе има вредност `False`. На почетку, пре уласка у петљу, вредност промељиве `deljiv` иницијализујемо на `True` (јер нисмо обрадили још ни један број, па је k сигурно дељив свим бројевима из тог празног скупа). Редом за сваки број од 2 до n проверавамо да ли је делилац броја k (број 1 нема потребе проверавати јер је k сигурно дељив њиме) и ако није, онда постављамо вредност промељиве `deljiv` на `False` (јер смо пронашли број између 1 и n којим број k није дељив). У том тренутку можемо и прекинути петљу (јер већ знамо да број k није дељив свим бројевима од 1 до n, па нема потребе анализирати остале делиоце). Прекид је могуће остварити наредбом `break`.

```
k = int(input()); n = int(input())
d = 2 # tekući delilac kojeg proveravamo
while d <= n: # proveravamo sve delioce do n
    if k % d != 0: # proveravamo da li je k deljiv sa d
        break      #   ako nije, prekidamo petlju
```

```
    d = d + 1      # prelazimo na ispitivanje narednog delioca
# ako je d <= n, petlja je prekinuta jer ne nađen broj koji nije delilac
print("da" if d > n else "ne")
```

Ако не желимо да користимо `break`, петља се може прекинути тако што се у услову петље тражи да да променљива `deljiv` чува тачну вредност.

Још једноставније решење добијамо ако напишемо функцију којом се проверава дељивост броја. У функцији коришћењем петље проверавамо да ли је број k дељив редом бројевима од 1 до n, ако није дељив неким од тих бројева прекидамо извршавање функције и враћамо `False`. На крају после завршетка петље, враћамо `True`, до чега ће доћи само ако је број k био дељив свим бројевима од 1 до n.

```
# provera da li je k deljiv sa svim brojevima od 1 do n
def deljivOd1Don(k, n):
    for d in range(1, n+1): # ispitujemo sve brojeve od 1 do n
        if k % d != 0:      # ako d nije delilac broja k
            return False    # k nije deljiv sa svim brojevima od 1 do n
    return True             # k je deljiv sa svim brojevima od 1 do n

k = int(input()); n = int(input())
print("da" if deljivOd1Don(k, n) else "ne")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Прва негативна температура

Познате су температуре за сваки дан неког периода. Написати програм којим се одређује редни број дана у том периоду када је температура први пут била негативна.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($3 \leq n \leq 365$) који представља број дана периода. Свака од наредних n линија садржи по један цео број из интервала $[-5, 40]$, бројеви представљају температуре редом за n дана периода.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати редни број дана периода када је температура први пут била негативна (дани се броје од 1 до n), ако такав дан не постоји приказати `-1`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5	3
12	
10	
-2	
-3	
4	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
3	-1
12	
10	
14	

Решење

У задатку Негативан број питали смо се да ли међу бројевима постоји број који је негативан, а у овом задатку тражимо мало више од тога - тражимо да одредимо прву позицију на којој се јавља неки негативан број. Решење опет можемо решити алгоритмом линеарне претраге, који можемо имплементирати на било који од начина приказаних у задатку Негативан број.

Уместо логичке променљиве којом региструјемо да ли се међу учитаним бројевима налази неки негативан, користићемо целобројну променљиву којом ћемо регистровати редни број (позицију тј. индекс) дана у којем се јавила негативна температура. Вредност те променљиве иницијализујемо на `-1` што указује да се до тог тренутка још није учитала негативна вредност. Након тога, учитавамо температуре једну по једну и ако је тренутна температура негативна, региструјемо редни број дана (то ће бити вредност бројачке променљиве у петљи, чије су вредности од 1 до n) и прекидамо петљу. На крају, штампамо променљиве у којој се региструје редни број (ако се није наишло на негативну температуру, она и даље има вредност -1).

```
n = int(input()) # broj dana koji se analiziraju
dan = -1  # redni broj dana sa negativnom temperaturom -
          # u početku pretpostavljamo da takav dan ne postoji
for i in range(1, n+1): # obrađujemo redom sve dane
```

```
    temperatura = int(input())  # učitavamo temperaturu
    if temperatura < 0:         # ako je ona negativna
        dan = i                 #    pamtimo redni broj dana
        break                   #    prekidamo petlju
print(dan)                      # ispisujemo redni broj dana
```

Могуће је избећи коришћење помоћне промењиве. Редом читамо температуру по температуру, при томе бројачком промењивом пратимо редни број текућег дана периода (почињемо бројање од 1). Приликом наиласка на негативну температуру, петљу прекидамо наредбом `break`. Након петље проверавамо да је услов петље испуњен (да ли је вредност бројачке промењиве мања или једнака броју дана периода n) и ако јесте, значи да је дошло до раног прекида и тада вредност бројачке промењиве садржи тражени број дана. У супротном можемо да прикажемо `-1`, јер се дошло до краја петље и није извршен рани прекид, што значи да међу учитаним температурама није постојала негативна.

```
n = int(input()) # broj dana koji se analiziraju
i = 1            # analiziramo redom dane od 1 do n
while i <= n:
    temperatura = int(input())  # učitavamo temperaturu za dan broj i
    if temperatura < 0:         # ako je ona negativna
        break                   #    prekida se petlja
    i = i + 1                   # prelazimo na naredni dan

if i <= n:       # ako je i <= n, onda je petlja prekinuta u koraku i
    print(i)
else:            # u suprotnom smo dosli do kraja petlje,
    print(-1)    # pa nije pronadjena negativna temperatura
```

Задатак: Последња негативна температура

Познате су температуре за сваки дан неког периода. Написати програм којим се одређује редни број дана у том периоду када је температура последњи пут била негативна (дани се броје од 1 до n).

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број n ($3 \leq n \leq 365$) који представља број дана периода. Свака од наредних n линија садржи по један цео број из интервала $[-10, 40]$, бројеви представљају температуре редом за n дана периода.

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати редни број дана периода када је температура последњи пут била негативна, ако такав дан не постоји приказати `-1`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5	4
2	
-8	
-2	
-3	
4	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
3	-1
12	
10	
14	

Решење

Решење овог задатка је веома слично решењу задатка Прва негативна температура. И овај пут користимо алгоритам линеарне претраге, са веома сличном имплементацијом. Једина разлика је то што се након проналажења прве негативне температуре петља не прекида, већ је увек неопходно учитати и обрадити све температуре. Целобројном промењивом пратимо редни број дана када је температура последњи пут међу учитаним температурама била негативна. На почетку вредност те промењиве је -1, јер још није учитана ни једна негативна температура. У петљи чија бројачка промењива узима вредности од 1 до n тј. која представља редни број дана учитавамо редом температуре за сваки дан. За сваку учитану температуру проверавамо да ли је негативна и ако јесте коригујемо вредност промењиве којом памтимо редни број дана када је температура последњи пут била негативна. Корекцију вршимо постављањем вредности те промењиве на вредност бројачке промењиве (јер је то редни број дана периода у којем је била управо прочитана температура).

```
n = int(input())  # broj dana koji se analiziraju
dan = -1          # redni broj dana sa negativnom temperaturom
```

```
for i in range(1, n+1):  # obrađujemo n dana sa brojevima od 1 do n
    temperatura = int(input())   # učitavamo temperaturu
    if temperatura < 0:          # ako je negativna
        dan = i                  #   ažuriramo redni broj dana
print(dan) # ispisujemo redni broj dana
```

Задатак: Парно непарни

Пера се игра картама. Све карте које је имао у руци је сложио тако да прво иду све карте са парним бројевима, а затим оне са непарним бројевима (могуће је и да је Пера имао само парне или само непарне карте). Напиши програм који проверава да ли је Пера исправно сложио карте.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се бројеви карата (природни бројеви између 2 и 10) све док се не дође до краја улаза (он се може унети са `Ctrl+Z` тј. `Ctrl+D`). Карата има најмање две, а највише десет.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако је Пера добро сложио карте тј. `ne` у супротном.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
2	da
6	
4	
5	
3	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
2	ne
6	
3	
5	
4	

Решење

Промена стања

Током провере наш програм се налази у два стања. У почетку смо у стању у којем прихватамо парне бројеве. Када се у том стању први пут појави неки непаран број прелазимо у стање у којем надаље смемо да прихватамо само непарне бројеве. Ако се у том стању појави неки паран број, онда низ не задовољава тражени услов. Тренутно стање се може регистровати једном логичком променљивом (на пример, променљива `neparni` која ће бити иницијализована на `False` и постављена на `True` први пут када се учита непаран број). Дакле, у петљи учитавамо број по број све док не дођемо до краја улаза (начине да се то уради смо видели у задатку Читање до краја улаза). Логичком променљивом `OK` коју иницијализујемо на `True` бележимо да ли бројеви задовољавају услов задатка. У услову петље захтевамо да је вредност променљиве `OK` тачно, јер у супротном знамо да бројеви не задовољавају тражени распоред и нема потребе вршити даље провере. У телу петље, након учитавања наредног броја проверавамо да ли смо наишли на непаран броју у тренутку док променљива `neparni` има вредност `False`. Када се то догоди вредност променљиве `neparni` постављамо на `True`. Такође, проверавамо да ли је учитан паран број док је вредност променљиве `neparni` једнака `True` и у том случају променљиву `OK` постављамо на `False` (јер знамо да се појавио паран број након непарног). На крају резултат пријављујемо у зависности од вредности `OK`.

Приметимо да се овде заправо у две фазе примењује алгоритам линеарне претраге, који смо приказали у задатку Негативан број. У првом стању се врши претрага за непарним бројем и када се он нађе, прелази се у друго стање. У другом стању се врши претрага за парним бројем и ако се он нађе, пријављује се да низ не задовољава услов.

```
import sys

OK = True       # da li je serija za sada ispravna
neparni = False # da li smo u presli u deo sa neparnim brojevima

for linija in sys.stdin: # čitamo jedan po jedan broj sa ulaza
    x = int(linija)
    if x % 2 != 0:       # ako je broj neparan,
        neparni = True   #   prelazimo na čitanje neparnih brojeva
    else:
        if neparni:      # paran se broj javio u neparnom delu niza
            OK = False   #   konstatujemo grešku i prekidamo petlju
            break
```

```
print("da" if OK else "ne")  # ispisujemo rezultat
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Први и последњи приступ

Са рачунара у школи на сајт школе се логују разни ђаци. Сваки пут када се неко улогује то се памти у бази. Напиши програм који за дати број рачунара одређује који је први, а који је последњи ђак који се логовао.

Улаз: Са стандардног улаза се у првој линији уноси редни број рачунара који нас занима (цео број од 1 до 100), у другој линији се налази укупан број n ($1 \leq n \leq 50000$) логовања, а затим се у наредних n линија налазе подаци о појединачним логовањима: број рачунара са којег се неки ђак логовао (цео број од 1 до 100) и корисничко име тог ђака (ниска од највише 20 малих слова енглеске абецеде).

Излаз: На стандардни излаз исписати име првог и име последњег ђака који се логовао на тај рачунар (свако у посебном реду) или текст `nema` ако се са тог рачунара нико није логовао.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5 1 zika 3 jovana 2 ana 3 pera 3 milica	jovana milica

Задатак: Провера тробојке

Напиши програм који проверава да ли су бројеви који се уносе уређени тако да прво иду негативни, затим нуле и на крају позитивни бројеви (могуће је и да било којих од наведених бројева нема).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број бројева n ($1 \leq n \leq 20$), а након тога и сами бројеви, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако су бројеви уређени како је наведено тј. `ne` у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 -3 -1 0 4 2	da

4.2.9 Позициони запис броја

У поглављу о малим серијама видели смо како итеративним алгоритмом можемо одредити цифре броја (сдесна налево) и како од цифара броја можемо одредити вредност броја (било да оне долазе слева надесно или сдесна налево). У овом поглављу ћемо те алгоритме уопштити на веће бројеве тј. бројеве чији се број цифара не зна унапред (стога ћемо у имплементацији користити условне петље).

У наредним задацима алгоритме за рад са цифрама у позиционом запису комбиноваћемо са раније приказаним алгоритмима за обраду бројевних серија (израчунавање статистика, претрага, пресликавање и слично).

Задатак: Број и збир цифара броја

Написати програм којим се одређује број и збир цифара декадног записа природног броја.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава цео број од 0 до 1000000000.

Излаз: На стандардни излаз се исписују број цифара и збир цифара учитаног броја.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`23645`	`5 20`	`0`	`1 0`

Решење

Серију цифара у декадном запису броја (здесна налево) можемо одредити операцијом целобројног дељења са 10, као што смо то видели, на пример, у задатку Збир цифара четвороцифреног броја. Последња декадна цифра броја одређује се као остатак при дељењу са 10, а уклања се када се израчуна целобројни количник са 10. Подсетимо се, један начин да одредимо последње три цифре броја био је следећи итеративни поступак.

```
c0 = n mod 10; n = n div 10;
c1 = n mod 10; n = n div 10;
c2 = n mod 10; n = n div 10;
```

При том, ако је почетни број био троцифрен, тада ће вредност промењиве `n` након извршавања овог фрагмента кода бити 0.

За разлику од ранијих задатака у којима је број цифара био фиксиран (и обично мали), у овом задатку није унапред познат број цифара броја. Зато је цифре броја потребно одређивати у петљи. У сваком кораку текућу цифру одређујемо као $n \bmod 10$, а затим је уклањамо тако што вредност промењиве n замењујемо вредношћу $n \operatorname{div} 10$. Петља се завршава када се уклоне све цифре и када вредност промењиве n постане нула. Да би се и у случају када је број n једнак 0 ова цифра обрадила мора се организовати петља са постусловом (пошто у језику Пајтон не постоји петља `do-while` нити `repeat-until`, као други програмски језици, потребно је употребити наизглед бесконачну петљу `while True` којој се услов проверава у телу, наредбом `if` и која се ако је услов испуњен прекида наредбом `break`). У неким случајевима, на пример, код бројања цифара, то утиче на исправност алгоритма, док у неким другим, на пример, код сабирања свих цифара, то није неопходно (наиме обрада цифре подразумева њено додавање на збир, а сасвим је свеједно да ли ће се збир увећати за цифру нула или ће остати непромењен - ефекат је исти). Тако се добија следећи алгоритам.

```
while True:
    c = n % 10
    ...
    n = n // 10
    if n != 0:
        break
```

Када знамо како се одређује серија цифара, онда је лако одредити њене статистике - број и збир. Број цифара се израчунава бројањем елемената серије, на стандардни начин (слично као, на пример, у задатку Читање до нуле или Просек одличних). Бројач се пре петље иницијализује на нулу и увећава се за један у телу петље, приликом одређивања сваке наредне цифре. Збир се израчунава сабирањем елемената серије, опет на веома стандардан начин (слично као, на пример, у задатку Збир n бројева). У почетку се промењљива која треба да садржи збир иницијализује на нулу (неутрални елемент за сабирање), а затим се у сваком кораку петље увећава за вредност тренутно одређене цифре броја (она је одређена вредношћу $n \bmod 10$).

```
n = int(input())
broj_cifara = 0; zbir_cifara = 0       # inicijalizujemo broj i zbir
while True:                            # postupak se ponavlja
    cifra = n % 10                     #   izdvaja se poslednja cifra
    broj_cifara = broj_cifara + 1      #   uvećava se broj cifara
    zbir_cifara = zbir_cifara + cifra  #   uvećava se zbir cifara
    n = n // 10                        #   uklanja se poslednja cifra
    if n == 0:                         #   kada broj postane nula
        break                          #      postupak se prekida
print(broj_cifara, zbir_cifara)        # ispisujemo broj i zbir
```

Број и збир цифара могуће је одредити и рекурзивном функцијом.

```
def broj_cifara(n):
    if n < 10:
        return 1
    else:
        return broj_cifara(n // 10) + 1
```

```
def zbir_cifara(n):
    if n < 10:
        return n
    else:
        return zbir_cifara(n // 10) + n % 10

n = int(input())
print(broj_cifara(n), zbir_cifara(n))
```

Број и збир цифара могуће је одредити и репно-рекурзивним функцијама.

```
def broj_i_zbir_cifara(n):
    def broj_i_zbir_cifara_(n, broj, zbir):
        if n == 0:
            return (broj, zbir)
        else:
            return broj_i_zbir_cifara_(n // 10, broj + 1, zbir + n % 10)
    return broj_i_zbir_cifara_(n // 10, 1, n % 10)

n = int(input())
(broj, zbir) = broj_i_zbir_cifara(n)
print(broj, zbir)
```

Задатак: Да ли запис броја садржи цифру

Написати програм којим се испитује да ли декадни запис природног броја садржи дату цифру?

Улаз: У првој линији стандардног улаза уноси се природан број од 0 до 1000000000, а у другој декадна цифра.

Излаз: На стандардни излаз се исписује текстуални одговор, облика који је приказан у наредним примерима.

Пример 1

Улаз *Излаз*

```
29384     broj 29384 sadrzi cifru 3
3
```

Пример 2

Улаз *Излаз*

```
29384     broj 29384 ne sadrzi cifru 7
7
```

Решење

Провера да ли број садржи цифру заснива се на алгоритму издвајања цифара броја сдесна налево који смо видели у задатку Број и збир цифара броја и на алгоритму претраге којим се проверава да ли у серији постоји тражени елемент тј. елемент са траженим својством, који смо видели, на пример, у задатку Негативан број.

Као што смо видели, постоје разни начини да се алгоритам претраге имплементира. Један од најлакших је да се претрага имплементира у засебној функцији. Из задатог броја `n` (параметра функције), све док је већи од 0, у петљи се издваја цифра јединица (`n % 10`), проверава се да ли је издвојена цифра једнака задатој цифри (параметру функције). Ако јесте, прекида се извршавање функције и враћа логичка вредност `True`, а ако није, из броја се уклања издвојена цифра (`n /= 10`). Петља се понавља док се не пронађе тражена цифра или док `n` не постане 0, када се прекида извршавање, јер су задатом броју уклоњене све цифре. Пошто цифра није пронађена (јер би се иначе функција раније прекинула и вратила `True`), након петље функција треба да врати логичку вредност `False`. Пошто функција исправно треба да јави да број `0` садржи цифру `0`, пожељно је осигурати да ће се за сваки број бар једна цифра проверити, што је могуће ако се употреби петља са провером услова на крају.

Обратимо пажњу на то да је вредност `False` могуће вратити тек по завршетку петље, када су све цифре броја испитане. Честа грешка је да се она врати у грани `else` наредбе `if` у којој се упоређују текућа и тражена цифра.

```
# provera da li dekadni zapis broja n sadrži datu cifru
def sadrzi_cifru(n, cifra):
```

```
    while True:              # ponavljamo postupak
        if n % 10 == cifra:  #   ako je poslednja cifra ona tražena
            return True      #     broj sadrži cifru
        n = n // 10          #   uklanjamo cifru
        if n == 0:           #   ako je broj postao 0
            break            #     prekidamo  postupak
    return False             # cifra nije pronađena

n = int(input()); cifra = int(input())
print("broj ", n, " " if sadrzi_cifru(n, cifra) else " ne ",
      "sadrzi cifru ", cifra, sep="")
```

Претрага би се могла имплементирати и без засебне функције. У том случају би се користила логичка променљива која би на почетку имала вредност `False`, и која би се у тренутку проналаска тражене цифре постављала на `True` (ефикасности ради, у том тренутку би се петља могла прекинути, било наредбом `break` било ојачавањем услова петље у којем би се тражило да претрага траје само док је вредност те логичке променљиве `False`).

Рецимо и да уобичајени алгоритам издвајања цифара броја сдесна постепено мења његову вредност. Зато, ако је потребно након претраге имати оригиналну вредност броја на располагању (а у овом задатку јесте, да би се могла исписати одговарајућа порука), онда је потребно направити његову копију пре претраге. У решењу са функцијом, то није било неопходно радити јер се целобројни параметри у функцију преносе по вредности, што значи да се копирају током позива функције.

```
n = int(input()); cifra = int(input())
m = n  # kopiramo polaznu vrednost broja n
sadrzi = False  # da li n sadrži cifru cifra
while True:                 #  ponavljamo postupak
    if m % 10 == cifra:     #    ako je poslednja cifra ona tražena
        sadrzi = True       #       broj sadrži cifru
        break               #       prekidamo petlju
    m = m // 10             #    uklanjamo poslednju cifru
    if m == 0:              #    ako je broj m postao 0
        break               #       prekidamo postupak

print("broj ", n, " " if sadrzi else " ne ",
      "sadrzi cifru ", cifra, sep="")
```

Задатак: Различите цифре

Написати програм којим се испитује да ли су све цифре у декадном запису датог природног броја различите?

Улаз: Са стандардног улаза уноси се природан број од 0 до $2 \cdot 10^9$.

Излаз: На стандардном излазу исписује се текстуални одговор `DA` или `NE`.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`67569`	`NE`	`1234567890`	`DA`

Решење

Постоје различити начини да се провери да ли су све цифре броја различите.

Претрага појављивања сваке цифре у префиксу

Један је да се за сваку цифру броја провери да ли се јавља у префиксу броја испред себе (делу броја испред те цифре). На пример, за број 132345 проверавамо да ли се цифра 5 јавља у броју 13234, пошто се не јавља, проверавамо да ли се цифра 4 јавља у броју 1323, пошто се не јавља, проверавамо да ли се цифра 3 јавља у броју 132 и пошто се јавља, можемо да закључимо да полазни број нема све различите цифре. Дакле, у петљи у којој се одређују цифре броја сдесна налево (коју смо описали у задатку Број и збир цифара броја), за сваку цифру одређену као `n % 10` проверавамо da ли је садржана у запису броја `n // 10` добијеног њеним уклањањем. У основни лежи алгоритам претраге (испитујемо да ли постоји цифра која задовољава услов да се појављује), и најлакше га је имплементирати у засебној функцији (као што је показано, на пример, у

задатку) - први пут када се у петљи наиђе на цифру која је садржана у префиксу испред ње, функција која испитује да ли су све цифре различите враћа вредност `False`, а након петље враћа вредност `True`. Испитивање да ли запис броја садржи дату цифру можемо реализовати у засебној функцији, како је описано у задатку Да ли запис броја садржи цифру.

```
# ...
# da li su sve cifre broja n različite
def razlicite_cifre(n):
    while n >= 10:                    # dok broj nije jednocifren
        if sadrzi_cifru(n//10, n%10):  #   ako je poslednja cifra javlja
                                       #   u delu broja ispred nje
            return False               #      nisu sve cifre različite
        n //= 10                       #   uklanjamo poslednju cifru
    return True                        # nijedna cifra se ne ponavlja

n = int(input())
print("DA" if razlicite_cifre(n) else "NE")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Армстронгов број

Написати програм који за дати природан број n проверава да ли је тај број Армстронгов. k-то цифрен број је Армстронгов ако је једнак суми k-тих степена својих цифара. На пример, 370 је Армстронгов јер је $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$, 1634 је Армстронгов јер је $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$, док 12 није Армстронгов јер је $12 \neq 1^2 + 2^2$.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број n ($1 \leq n \leq 100000$).

Излаз: На стандардном излазу исписују се порука `DA` ако учитан број јесте Армстронгов, тј. `NE` ако учитан број није Армстронгов.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`1002`	`NE`	`370`	`DA`

Решење

Проверу да ли је број Армстронгов можемо разложити на неколико подзадатака.

Прво, на основу дефиниције Армстронговог броја изложилац на који ће се степеновати све цифре директно зависи од броја цифара броја (на пример, за троцифрене бројеве рачуна се збир кубова цифара, а за петоцифрене бројеве збир петих степена цифара). Зато је потребно да пребројимо цифре учитаног броја, што радимо на исти начин као у задатку Број и збир цифара броја.

Друго, потребно је да умемо да рачунамо степене цифара. Један начин да то урадимо је да искористимо библиотечку функцију за степеновање међутим, пошто она ради са реалним бројевима испрограмираћемо функцију која врши специјалан случај степеновања када су основа и изложилац природни бројеви, коришћењем алгоритма приказаног у задатку Степен. Ако рачунамо x^n, потребно је да израчунамо производ у којем се n пута јавља чинилац x. Зато је потребно да производ иницијализујемо на 1, а затим да га у петљи чије се тело извршава n пута помножимо са x у којем се такође израчунава производ).

Када умемо да рачунамо степен, потребно је да израчунамо збир степена цифара броја. Серију цифара броја одређујемо на уобичајени начин (као, на пример, у задатку Број и збир цифара броја), сдесна на лево, коришћењем целобројног дељења са 10. За сваку издвојену цифру израчунавамо степен и добијени резултат додајемо на текући збир, који пре петље иницијализујемо на нулу. Приметимо да ово веома личи на израчунавање збира цифара које смо приказали у задатку Број и збир цифара броја, једино што се на збир не додају цифре, већ њихови степени. Дакле, у сваком кораку пресликавамо текућу цифру степеном функцијом и сабирамо серију добијених слика, тј. примењујемо алгоритам сабирања пресликане серије.

На крају веома једноставно можемо проверити да ли је број Армстронгов тако што га упоредимо са добијеним збиром степена.

Један начин имплементације је да сваку од наведених функционалности имплементирамо у засебној функцији. Тако бисмо дефинисали функцију која за дати број израчунава број цифара броја, функцију која

израчунава степен, функцију која израчунава збир степена бројева и функцију која проверава да ли је број Армстронгов.

```
# funkcija izracunava broj cifara broja n
def broj_cifara(n):
    broj = 0
    while True:
        broj = broj + 1
        n = n // 10
        if n == 0:
            break
    return broj

# funkcija izracunava zbir k-tih stepena cifara broja n
def zbir_ktih_stepena_cifara(n, k):
    zbir = 0
    while True:
        zbir = zbir + (n % 10) ** k
        n = n // 10
        if n == 0:
            break
    return zbir

# funkcija proverava da li je dati broj Armstrongov tj. ako broj ima k
# cifara, da li mu je zbir k-tih stepena cifara jednak njemu samom
def armstrongov(n):
    return zbir_ktih_stepena_cifara(n, broj_cifara(n)) == n

# ucitavamo broj i proveravamo da li je Armstrongov
n = int(input())
if armstrongov(n):
   print("DA")
else:
   print("NE")
```

Ако бисмо се одлучили да све имплементирамо без помоћних функција, тада је потребно нагласити да се током извршавања неколико наведених корака број мења (на пример, приликом бројања цифара број у сваком кораку делимо са 10, све док не постане једнак нули). Зато је потребно да уведемо посебну променљиву у којој се чува оригинална вредност броја, да бисмо након измене броја могли да повратимо његову праву вредност (алтернативно тумачење исте имплементације је да се пре спровођења алгоритма оригинална вредност копира у помоћну променљиву која се током спровођења алгоритма мења).

```
# broj za koji proveravamo da li je Armstrongov
n = int(input())
# pamtimo originalnu vrednost broja n, jer ce se n menjati tokom
# sprovodjenja algoritama
n0 = n
# broj cifara broja n
br_cifara = 0
while n > 0:
   br_cifara = br_cifara + 1
   n = n // 10
# vracamo n na pocetnu vrednost
n = n0
# suma k-tih stepena cifara broja x, gde k broj cifara broja x
zbir_stepena = 0
while n != 0:
   # izdvajamo i uklanjamo poslednju cifru broja
   cifra = n % 10; n = n // 10
   # racunanje k-tog stepena cifara broja x gde k broj cifara broja x
```

```
   # moze i stepen = math.pow(cifra, br_cifara)
   stepen = 1
   for j in range(1, br_cifara+1):
      stepen = stepen * cifra
   # uvecavamo sumu za izracunati stepen
   zbir_stepena = zbir_stepena + stepen

if zbir_stepena == n0:
   print("DA")
else:
   print("NE")
```

Задатак: Трансформација броја у производ цифара

Природан број се трансформише тако што се замени производом својих цифара. Написати програм којим се исписују све трансформације броја док се не добије једноцифрен број. Одредити и колико трансформација је при томе потребно извршити.

Улаз: Једна линија стандардног улаза садржи један природан број.

Излаз: На стандардном излазу приказати у свакој линији по једну трансформацију датог броја (природан број), до једноцифреног броја. У последњој линији стандардног излаза приказати број трансформација.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3274	168
	48
	32
	6
	4

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5	0

Решење

Израчунавање производа цифара датог броја реализоваћемо у посебној функцији. Да би се он израчунао, потребно је одредити серију цифара броја (као што смо то описали у задатку Број и збир цифара броја) и пронаћи производ елемената те серије (као што смо то описали у задатку Факторијел). У петљи, призвод, чија је вредност на почетку 1, ћемо множити, редом, цифрама броја, почев од цифре јединица. Цифру јединица броја одређујемо као остатак при дељењу броја са 10. Дељењем броја са 10 уклањамо цифру јединица па у следећем извршавању тела петље, приступамо следећој цифри. Понављамо поступак док полазни број не постане 0.

У главној функцији, у петљи, броју додељујемо производ његових цифара док не постане једноцифрен (мањи од 10). Број извршавања тела петље је тражени број трансформација (њега ћемо одредити коришћењем посебног бројача који ћемо иницијализовати на нулу и увећавати у сваком кораку петље).

```
# računa proizvod cifara broja n
def proizvod_cifara(n):
    p = 1                  # proizvod cifara
    while True:            # ponavljamo postupak
        p = p * (n % 10)   #   množimo proizvod poslednjom cifrom broja
        n = n // 10        #   uklanjamo poslednju cifru broja n
        if n == 0:         #   kada broj dostigne 0
            break          #      prekidamo postupak
    return p               # vraćamo izračunati proizvod

n = int(input()) # broj koji analiziramo
brojac = 0       # broj transformacija dok ne postane jednocifren
while n >= 10:                  # dok je broj visecifren
    n = proizvod_cifara(n)      # menjamo ga proizvodom njegovih cifara
    print(n)                    # ispisujemo promenjeni broj
    brojac = brojac + 1         # uvecavamo broj transformacija
print(brojac)
```

Задатак: Најмањи број са највећим збиром парних цифара

Уносе се природни бројеви (укључујући и 0) док се не унесе -1. Међу унетим бројевима који садрже бар једну парну цифру, наћи најмањи број са највећим збиром парних цифара.

Улаз: Линије стандардног улаза, њих највише милион, садрже по један природан број. Последња линија стандардног улаза садржи број -1.

Излаз: Прва и једина линија стандардног излаза садржи најмањи број од унетих бројева са највећим збиром парних цифара. Ако међу унетим бројевима нема оних који садрже парне цифре, на излазу приказати -1.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
137	4
20	
143	
221	
0	
22	
4	
-1	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
137	-1
39	
155	
791	
731	
31	
-1	

Решење

У овом задатку се комбинују разне технике приказане у ранијим задацима. Прво, потребно је уносити серију бројева, све док се не учита број -1, што је могуће урадити слично као у задатку Читање до нуле. Међу учитаним бројевима анализирамо само оне који садрже бар једну парну цифру, тј. вршимо филтрирање серије на основу услова да садржи бар једну парну цифру. Испитивање да ли број садржи бар једну парну цифру засновано је на комбинацији алгоритма одређивања цифара броја (који смо видели у задатку Број и збир цифара броја) и алгоритму претраге, који смо користили, на пример, у задатку Негативан број. Међу бројевима који садрже парне цифре одређујемо максимум (врши се одређивање максимума тј. минимума филтриране серије). Максимум се одређује у односу на релацију лексикографског поретка, слично као што је показано, на пример, у задатку Најближи датом целом броју. Прво се пореди збир парних цифара. Цифре броја издвајамо како је приказано у задатку Број и збир цифара броја, а затим сабирамо оне које су парне, што је алгоритам одређивања статистике филтриране серије, какав смо видели у задатку Просек одличних.

Основна варијанта алгоритма

Имајући речено у виду, можемо описати основну варијанту алгоритма.

Имплементираћемо функцију која одређује да ли декадни запис датог броја садржи неку парну цифру. У петљи одређујемо и уклањамо цифру по цифру сдесна коришћењем целобројног дељења са 10. Ако је цифра парна (тј. ако јој је остатак при дељењу са 2 једнак нули), тада функција може да врати вредност `True`. Након завршетка петље, на крају функције вратићемо вредност `False`, јер током извршавања петље није пронађена парна цифра. Нагласимо да посебну пажњу треба обратити на случај броја нула, који садржи парну цифру - један начин да се тај случај исправно обради је да се употреби петља са провером услова на крају или у телу петље.

Имплементираћемо и функцију која одређује збир цифара декадног записа датог броја (збир који ћемо иницијализовати на нулу ћемо увећавати за једну по једну цифру броја), исто као у задатку Број и збир цифара броја.

У главном програму можемо у бесконачној петљи учитавати број по број и након сваког учитаног броја проверавати да ли је учитана специјална вредност -1. Ако јесте, прекидаћемо петљу. За сваки учитани број провераваћемо да ли садржи неку парну цифру (помоћу функције коју смо имплементирали) и број ћемо даље обрађивати само ако садржи парну цифру. Одржаваћемо променљиву `max` која чува вредност до сада најбољег учитаног елемента (најмањег до сада учитаног броја који садржи бар једну парну цифру и има збир парних цифара већи или једнак збировима парних цифара свих до сада учитаних бројева). Одржаваћемо и логичку променљиву која ће указивати на то да ли је до сада учитан неки број који садржи парну цифру, тј. да ли је променљива `max` постављена (друга могућност је да максимум иницијализујемо на неку специјалну, негативну вредност). За сваки учитани број за који је утврђено да садржи парну цифру, провераваћемо да ли је бољи од свих раније учитаних тј. да ли вредност променљиве `max` треба ажурирати и поставити на тај број. Постоји неколико случајева када је то потребно урадити.

- Први случај је када је ово први од свих до сада учитаних бројева који садржи парну цифру (што лако испитујемо на основу вредности одговарајуће логичке променљиве), и у том случају нема потребе за поређењима са вредношћу променљиве `max` (она у том тренутку ни нема постављену праву вредност),
- други случај је када је збир парних цифара тренутног броја (који можемо израчунати коришћењем функције коју смо имплементирали) мањи од вредности збира парних цифара броја `max`,
- трећи случај је када су та два збира једнака, али је тренутни број мањи од броја `max`.

У првом случају треба ажурирати и вредност логичке променљиве и поставити је на вредност `true` (а не смета да се то уради и у осталим случајевима, увек када се ажурира вредност `max`).

На крају, по завршетку петље у којој се учитавају сви бројеви, на основу логичке променљиве знамо да ли је био учитан бар један број чији декадни запис садржи парну цифру и ако јесте, исписујемо вредност променљиве `max`, а ако није, исписујемо специјалну вредност -1.

```
# vraća True ako i samo ako n sadrži bar jednu parnu cifru u svom
# dekadnom zapisu
def ima_parnih_cifara(n):
    while True:
        if n % 2 == 0:
            return True
        n = n // 10
        if n == 0:
            break
    return False

# izračunava zbir parnih cifara broja n
def zbir_parnih_cifara(n):
    zbir = 0
    while True:
        if n % 2 == 0:
            zbir = zbir + n % 10
        n = n // 10
        if n == 0:
            break
    return zbir


# max - najbolji do sada procitani broj (najmanji broj sa najvecim
# zbirom parnih cifara)
postavljen_max = False # da li je pronađen neki broj sa parnim ciframa
while True: # ponavljamo sledeći postupak
   n = int(input()) # učitavamo naredni broj
   if n == -1:      # ako smo učitali -1, prekidamo izvrsavanje
      break
   if ima_parnih_cifara(n): # ako broj n sadrži bar jednu parnu cifru
      # ako je on prvi takav broj
      # ili je njegov zbir parnih cifara veći od prethodno najboljeg
      # ili je zbir jednak prethodno najboljem, ali je sam broj manji
      if (not postavljen_max or
         zbir_parnih_cifara(n) > zbir_parnih_cifara(max) or
         (zbir_parnih_cifara(n) == zbir_parnih_cifara(max) and n < max)):
         max = n  # ažuriramo najbolji broj
         postavljen_max = True # pronađen je broj sa parnom cifrom

# ispisujemo rezultat (-1 ako nije nađen nijedan broj sa parnim ciframa)
print(max if postavljen_max else -1)
```

Могуће оптимизације

Овако дефинисан алгоритам исправно ради, али га је могуће оптимизовати у неколико аспеката. Један од

проблема је то што се приликом сваког упоређивања изнова рачуна и збир цифара броја max и збир цифара тренутно учитаног броја. Зато има смисла уз променљиву max чувати и променљиву која садржи збир њених парних цифара. Приликом обраде сваког новог броја који садржи бар једну парну цифру, треба израчунати њен збир парних цифара, проверити да ли је испуњен неки од наведених услова за ажурирање вредности max и ако јесте, уз ажурирање вредности max на вредност текућег броја, променљивој која чува збир парних цифара броја max треба доделити раније израчунату вредност збира парних цифара текућег броја.

Још једно место могуће оптимизације је замена две независне функције (једне која проверава да ли број садржи парну цифру и друге која рачуна збир парних цифара) једном функцијом која ради оба задатка. Та функција враћа и збир парних цифара и податак о томе да ли број садржи парну цифру. Функција две вредности може да врати у облику уређеног пара. Још једна могућност је да функција врати неку специјалну негативна вредност ако број не садржи ниједну парну цифру (јер се зна да су регуларне вредности збира парних цифара увек ненегативне).

Ипак не може се очекивати да ће ово довести до значајних убрзања, јер се захваљујући раном прекиду приликом претраге, детекција постојања парних цифара изврши доста брже него обилазак и сабирање свих парних цифара броја.

```
# vraća zbir parnih cifara broja ako broj n sadrži bar jednu parnu
# cifru, a vrednost -1 ako broj n ne sadrži parnu cifru
def zbir_parnih_cifara(n):
    ima_parnih_cifara = False # da li broj sadrzi parnu cifru?
    zbir = 0                  # zbir parnih cifara
    while True:
        if n % 2 == 0: # skraćeno od (n % 10) % 2 == 0
            ima_parnih_cifara = True  # pronađena je parna cifra
            zbir = zbir + n % 10      # uvećavamo zbir
        n = n // 10    # uklanjamo cifru
        if n == 0:     # ako je broj postao 0
            break      #   prekidamo postupak
    # vraćamo ili izračunati zbir ili -1 ako parna cifra nije nađena
    return zbir if ima_parnih_cifara else -1

max = -1 # najbolji do sada pročitani broj
         # -1 ukazuje da do sada nije bilo brojeva sa parnim ciframa
while True:   # ponavljamo sledeći postupak
    n = int(input())  # učitavamo naredni broj
    if n == -1:       # ako smo učitali -1, prekidamo izvršavanje
        break
    # izračunavamo zbir parnih cifara broja n
    zbir_parnih_cifara_n = zbir_parnih_cifara(n)
    if zbir_parnih_cifara_n != -1: # ako broj n sadrzi parnu cifru
        # ako je on prvi takav broj
        # ili je njegov zbir parnih cifara veci od prethodno najboljeg
        # ili je jednak prethodno najboljem, ali je sam broj manji
        if max == -1 or \
            zbir_parnih_cifara_n > zbir_parnih_cifara_max or \
            zbir_parnih_cifara_n == zbir_parnih_cifara_max and n < max:
            # ažuriramo najbolji broj i njegov zbir cifara
            max = n
            zbir_parnih_cifara_max = zbir_parnih_cifara_n

print(max) # ispisujemo rezultat
```

Задатак: Број формиран од датих цифра с лева на десно

Написати програм којим се формира природан број од учитаних цифара, ако се цифре броја учитавају слева на десно (редом од цифре највеће тежине до цифре јединица).

Улаз: Свака линија стандарног улаза, њих највише 9, садржи по једну цифру.

Излаз: На стандарном излазу приказати формирани број.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 1 0 9	4109

Решење

Читамо цифру по цифру са стандардног улаза, све док не дођемо до краја и формирамо број додавајући му прочитану цифру на десну страну (као цифру најмање тежине). Формирање броја на основу цифара с лева надесно разматрали смо и раније (на пример, у задатку Јарди, стопе и инчи). Алгоритам се назива *Хорнерова шема* и на основу тог алгоритма број се гради тако што се у сваком кораку претходна вредност броја помножи са 10 и добијени производ се увећа за вредност наредне цифре (тако се цифра допише на десни крај претходног броја). Анализирајмо пример у којем учитавамо редом цифре 3, 2, 7 и 5 и треба да добијемо број 3275. На основу дефиниције позиционог записа тај број је једнак вредности израза $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$. Међутим, претходни израз можемо израчунати на следећи начин $((3 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 7) \cdot 10 + 5$, што доводи до Хорнеровог поступка. Ако се он имплементира итеративно, променљива `n` којом се представља вредност броја узима редом вредности 0, 3, 32, 327 и 3275.

Пошто број цифара није унапред познат, цифре ћемо учитавати у петљи којом учитавамо бројеве до краја стандардног улаза. Та техника је приказана у задатку Читање до краја улаза.

Број који формирамо памтићемо у променљивој `n` коју иницијизујемо на нулу. Када прочитамо цифру, додајемо је као цифру јединица на до сада формирани број. Додавање цифре јединица на број `n`, постижемо тако што помножимо броја `n` са 10 и додамо му учитану цифру. Ако унесемо k цифара, на описан начин цифру коју смо прву прочитали множићемо са 10 тачно $k - 1$ пут, другу прочитану цифру множимо са 10 тачно $k - 2$ пута, и тако редом, последњу прочитану цифру не множимо са 10 (то је цифра јединица).

Докажимо и формално коректност Хорнерове схеме. Претпоставимо да ће се редом учитавати цифре a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0. Инваријанта петље је то да је n вредност броја који се добија записом до сада прочитаних и обрађених цифара. Након i извршавања тела петље то су цифре од a_{k-1} до a_{k-i} и тврдимо да важи

$$n = (a_{k-1} \ldots a_{k-i})_{10} = a_{k-1}10^{i-1} + a_{k-2}10^{i-2} + \ldots + a_{k-i}10^0.$$

- *База*. Након 0 извршавања тела петље важи да је $n = 0$ и $i = 0$. Број $(a_{k-1} \ldots a_{k-i})_{10} = (a_{k-1} \ldots a_k)_{10}$ нема ниједну цифру и вредност му је нула.
- *Корак*. Претпоставимо да инваријанта важи на уласку у тело петље. Нека је $i' = i + 1$. Из тела петља види се да је $n' = 10 \cdot n + a_{k-i-1}$. Пошто на основу индуктивне хипотезе важи $n = a_{k-1}10^{i-1} + a_{k-2}10^{i-2} + \ldots + a_{k-i}10^0$, важи и да је

  $$n' = 10(a_{k-1}10^{i-1} + a_{k-2}10^{i-2} + \ldots + a_{k-i}10^0) + a_{k-i-1} = a_{k-1}10^i + a_{k-2}10^{i-1} + \ldots + a_{k-i}10 + a_{k-i-1}.$$

  Пошто је $i' = i + 1$, важи да је

  $$n' = a_{k-i}10^{i'-1} + a_{k-2}10^{i'-2} + \ldots + a_{k-i'+1}10 + a_{k-i'},$$

  па је инваријанта очувана.

Када се петља заврши, биће учитано k цифара, па ће важити да је $i = k$, тј.

$$n = (a_{k-1} \ldots a_{k-i})_{10} = a_{k-1}10^{i-1} + a_{k-2}10^{i-2} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

што значи да n садржи декадну вредност броја формираног од свих k цифара.

```
import sys
n = 0                    # rezultujući broj
for linija in sys.stdin: # čitamo jednu po jednu liniju do kraja ulaza
    cifra = int(linija)  #   određujemo pročitanu cifru
    n = n * 10 + cifra   #   dopisujemo je sa desne strane broja
print(n)                 # ispisujemo formirani rezultujući broj
```

Задатак: Број формиран од датих цифара здесна на лево

Написати програм којим се формира природан број од учитаних цифара, ако се цифре броја учитавају здесна на лево (редом од цифре јединица до цифре највеће тежине).

Улаз: Свака линија стандардног улаза (њих највише 9) садржи по једну цифру.

Излаз: На стандардном излазу приказати формирани број.

Пример

Улаз	*Излаз*
0 0 3 2 9	92300

Решење

Читамо цифру по цифру са стандардног улаза, све док не дођемо до краја и формирамо број додавајући му прочитану цифру на леву страну (као цифру највеће тежине). Формирање броја на основу цифара здесна налево разматрали смо и раније, у задатку Цифре сдесна. Цифре се учитавају здесна на лево па су њихове позиције редом цифра јединица, цифра десетица, стотина и тако даље. На пример ако учитамо цифре редом 3, 2, 7 и 5, треба да добијемо број 5723. Тај број можемо формирати као $3 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3$. Тежину текуће цифре можемо одредити уз помоћ променљиве у којој памтимо одговарајући степен броја 10.

Пошто број цифара није унапред познат, цифре ћемо учитавати у петљи којом учитавамо бројеве до краја стандардног улаза (веома слично као што је приказано у задатку Читање до краја улаза). Број који формирамо памтићемо у променљивој `n` коју иницијализујемо на нулу, а тежину цифре, тј. степен броја 10 у променљивој `s` коју иницијализујемо на 1. Цифру додајемо броју `n` с лева тако што број `n` увећамо за производ те цифре и одговарајућег степена броја 10 (променљиве `s`). У сваком кораку вредност променљиве `s` коригујемо множећи је са 10 (тако ће, с обзиром да је иницијализована на вредност 1, она редом узимати вредности 1, 10, 100, 1000 …).

```
import sys
n = 0                   # rezultujući broj
st10 = 1                # težina naredne cifre (1, 10, 100, ...)
for linija in sys.stdin: # čitamo jednu po jednu liniju do kraja ulaza
    cifra = int(linija)  #   određujemo pročitanu cifru
    n = n + cifra*st10   #   dopisujemo je sa leve strane broja n
    st10 = st10 * 10     #   određujemo težinu naredne cifre
print(n)                # ispisujemo formirani rezultujući broj
```

Задатак: Замени цифре 0 са 5

Написати програм који у датом природном броју свако појављивање цифре 0 замењује цифром 5.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број у границама од 0 до 1000000000.

Излаз: На стандардном излазу се исписује добијени број.

Пример

Улаз	*Излаз*
20240607	25245657

Решење

У решењу овог задатка комбинујемо алгоритам одређивања серије цифара броја здесна налево, заснован на целобројном дељењу са 10, који смо објаснили у задатку Број и збир цифара броја и алгоритам формирања броја од серије његових цифара здесна налево који смо објаснили у задатку Број формиран од датих цифара здесна на лево. Издвајаћемо цифру по цифру полазног броја и додаваћемо их на почетак новог броја, при чему ћемо проверавати да ли је тренутна цифра једнака цифри коју треба заменити. Ако јесте, на почетак броја додаће се цифра којом се мења цифра коју треба заменити, а ако није, додаће се тренутна цифра.

Имплементираћемо функцију која је мало општија од постављеног задатка и која мења дату цифру `a` цифром `b` (у главном програму ћемо је позвати за вредности `a=0` и `b=5`). Променљиву која ће садржати модифико-

вани број (у коме је `a` замењена са `b`) ћемо пре петље иницијализовати на нулу. Увешћемо и променљиву која одређује тежину наредне цифре и иницијализоваћемо је на 1 (тежина цифре јединица). У петљи ћемо издвајати последњу цифру `c` текуће вредности броја `n` (одређивањем остатка при дељењу са 10), уклањати је из броја (одређиваћем целобројног количника броја `n` са 10) и проверавати да ли је цифра јединица једнака `a`. Ако јесте, нови број ћемо увећавати за производ цифре `b` и текуће тежине, а у супротном за производ цифре `c` и текуће тежине. Након тога ћемо тежину увећати 10 пута тј. постављаћемо је на тежину наредне цифре. Тело петље се понавља док се из датог броја `n` не издвоје све цифре, тј. док вредност `n` не постане 0.

```
# u broju n zamenjuje svako pojavljivanje cifre a, cifrom b
def zameni(n, a, b):
    t = 1         # težina naredne cifre (1, 10, 100, ...)
    novi_broj = 0 # broj koji se dobija nakon zamene
    # prolazimo kroz sve cifre broja n, sdesna nalevo
    while True:
        c = n % 10     # izdvajamo cifru jedinica
        n = n // 10    # uklanjamo cifru jedinica iz broja n
        # u novi broj, na početak upisujemo:
        #   - cifru b, ako je c == a,
        #   - cifru c, inače
        novi_broj = novi_broj + (b if c == a else c) * t
        t = t * 10     # izračunavamo težinu naredne cifre
        if n == 0:
            break
    return novi_broj   # vraćamo novoformirani broj

# ucitavamo broj i menjamo sve nule peticama
n = int(input())
print(zameni(n, 0, 5))
```

Задатак: Децимале броја 1/n

Одреди првих k децималних цифара вредности $\frac{1}{n}$ за дати позитиван природан број n. Претпоставити да се након k децимала врши одсецање тј. да се број заокружује наниже.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број k ($1 \leq k \leq 1000$) а друга природан број n ($2 \leq n \leq 1000$).

Излаз: На стандардном излазу, приказујемо количник са траженим бројем децимала (потребно је употребити децималну запету, а не децималну тачку).

Пример

Улаз	*Излаз*
4 33	0,0303

Решење

Због јако великог броја децимала (k може бити и 1000) не можемо користити рад са реалним бројевима (тип `double` подржава највише 15-16 децимала).

Децимале одређујемо стандардним поступком дељења бројева. Размотримо, на пример, како се одређују прве три децимале броја $\frac{1}{7}$.

```
1 : 7 = 0.142
10
 7
--
 30
 28
 --
  20
  14
  --
```

```
6
```

Кренули смо од броја 1, помножили смо га са 10 (спустили наредну нулу), одредили смо количник са 7 и тако смо добили прву децималу 1. Након тога смо од броја 10 одузели производ броја 1 и броја 7 и тако добили број 3. Приметимо да је број 3 заправо остатак при дељењу броја 10 бројем 7. Након тога, помножили смо број 3 бројем 10, одредили смо количник са 7 и тако добили наредну децималу 4. Након тога, смо од броја 30 одузели количник броја 4 и броја 7 и тако добили број 2, што је заправо остатак при дељењу броја 30 бројем 7. Помножили смо 2 бројем 10, одредили количник са 7 и добили наредну децималу 2. Уједно смо припремили и наредни корак тако што смо од броја 20 одузели производ бројева 2 и 7 и тако добили број 6, што је заправо, остатак при дељењу бројева 20 и 7.

Приметимо да се у сваком кораку понавља исти поступак. Претходни број множимо са 10, а наредну децималу и наредни број одређујемо као целобројни количник и остатак добијеног производа бројем n. Овај корак треба поновити тачно k пута.

```
broj = 1;
ponovi k puta:
  decimala = (10 * broj) div n;
  broj = (10 * broj) mod n;
```

Покажимо и формално да се на овај начин исправно добијају децимале броја. Претпоставимо да је $0 \leq x < n$, и да је

$$\frac{x}{n} = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots,$$

Тада је

$$10 \cdot \frac{x}{n} = a_1, a_2 \ldots a_k \ldots,$$

Пошто је $0, a_2 \ldots a_k \ldots < 1$, а $0 \leq a_1 < 10$, важи да је

$$a_1 = \left\lfloor \frac{10 \cdot x}{n} \right\rfloor = (10 \cdot x) \operatorname{div} n.$$

На основу дефиниције целобројног количника и остатка (види задатак Разломак у мешовит број) важи да је $10 \cdot x = ((10 \cdot x) \operatorname{div} n) \cdot n + (10 \cdot x) \bmod n$. Зато је

$$\frac{(10 \cdot x) \bmod n}{n} = \frac{10 \cdot x}{n} - ((10 \cdot x) \operatorname{div} n) = (a_1, a_2 \ldots a_k \ldots) - a_1 = 0, a_2 \ldots a_k \ldots.$$

Дакле, прва децимала броја $\frac{x}{n}$ се може одредити као $(10 \cdot x) \operatorname{div} n$ док се остале децимале могу одредити тако што се исти поступак примени на број $\frac{x'}{n}$, где је $x' = (10 \cdot x) \bmod n$.

Приметимо да решење овог задатка има великих сличности са решењем задатка К децимала у бинарном запису.

```
k = int(input())      # broj decimala
n = int(input())      # imenilac
print("0,", end="")
broj = 1              # tekući deljenik
for i in range(k):
   print((10 * broj) // n, end="")  # određujemo narednu cifru
   broj = (10 * broj) % n           # ažuriramo deljenik
print()
```

Задатак: К децимала у бинарном запису

Написати програм којим се исписује k децимала бинарног записа реаланог броја x $(0 \leq x < 1)$.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи реалан број из интервала [0,1). Друга линија стандардног улаза садржи природни број k $(1 \leq k \leq 100)$.

Излаз: У првој и јединој линији стандардног излаза приказати бинарни запис броја x, заокружен на k децимала.

Пример

Улаз	*Излаз*
`0.8`	`0.1100`
`4`	

Решење

Пошто тражени број децимала може бити велики, не можемо користити системску репрезентацију реалних бројева (која јесте бинарна), тј. резултат не можемо добити ишчитавањем битова мантисе. Наиме, мантиса у запису података типа `double` има око 50 битова, а у задатку се тражи и до 1000 битова.

Да бисмо објаснили бинарни запис реалних бројева, подсетимо се прво дефиниције позиционог записа броја. Као што је то раније показано запис $(x_n x_{n-1} \ldots x_1)_b$ има вредност $x_n \cdot b^n + x_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot b + x_0$. На пример, декадни запис 123 означава $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$, док бинарни запис $(1001)_2$ означава $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 9$.

Слично, децимални запис $0,123$ представља број $1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000}$. Заиста, децимални запис $(0, x_1 x_2 \ldots x_k \ldots)_b$ има вредност

$$x_1 \cdot b^{-1} + x_2 \cdot b^{-2} + \ldots + x_k b^{-k} + \ldots = x_1 \cdot \frac{1}{b} + x_2 \cdot \frac{1}{b^2} + \ldots + x_k \cdot \frac{1}{b^k} + \ldots .$$

Зато запис броја x $(0 \leq x < 1)$ у бинарном систему $0, x_1 x_2 x_3 ... x_k \ldots$ значи да је $x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} ... + \frac{x_k}{2^k} + \ldots$. На пример, запис $0,101$ означава $1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} = 0,5 + 0,125 = 0,625$. Множењем са 2 добијамо $x \cdot 2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + ... + \frac{x_k}{2^{k-1}} + \ldots$. Пошто је $\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + ... + \frac{x_k}{2^{k-1}} + \ldots < 1$, закључујемо да је x_1 цео део производа $x \cdot 2$, тј. $x_1 = \lfloor x \cdot 2 \rfloor$, и да разломљени (децимални) део броја $x \cdot 2$ има вредност $\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \ldots + \frac{x_k}{2^{k-1}}$, тј. да је његов бинарни запис $0, x_2 ... x_k$. Неколико начина да се децимални број раздвоји на свој цео и разломљени део приказано је у задатку Динари и паре

Настављајући исти поступак за разломљени део броја $x \cdot 2$ добијамо и остале цифре бинарног записа.

Дакле, решење формулишемо тако што у петљи која се извршава k пута понављамо следеће:

- израчунавамо производ броја x и броја 2,
- приказујемо цео део добијеног производа (то је наредна цифра у бинарном запису),
- постављамо број x на вредност разломљеног дела нађеног производа, припремајући се тако за наредну итерацију.

```
x = float(input())
k = int(input())
print("0.", end="")
for i in range(k):
    x = x * 2
    print(int(x), end="")
    x = x - int(x)
print()
```

Задатак: Бројеви који не садрже цифру 5

Напиши програм који одређује колико бројева на стандардном улазу не садржи цифру 5.

Улаз: Свака линија стандардног улаза садржи један природан број из интервала $[0, 1000000000]$.

Излаз: На стандардни излаз исписати колико од учитаних бројева не садржи цифру 5.

Пример

Улаз	*Излаз*
12 15 155 14	2

Задатак: Комбинација два броја минимумом и максимумом одговарајућих цифара

Два дата природна броја се комбинују тако што се потпишу један испод другог, као када се сабирају, али се свака цифра резултата одређује као мања или као већа од две цифре (ако су бројеви различите дужине тада се испред краћег броја допише онолико нула колико је потребно да се бројеви изједначе по дужини). Нпр. за бројеве 174 и 38, добија се 34 ако се узима мања од две цифре тј. 178 ако се узима већа.

Улаз: Свака од две линије стандарног улаза садржи по један природан број.

Излаз: На стандарном излазу приказати два природна броја - један који се добија комбиновањем два броја узимајући мању, а други узимајући већу цифру на свакој позицији.

Пример

Улаз	*Излаз*
174 38	34 178

4.2.10 Однос суседних елемената серије

Задатак: Максимална разлика суседних

Написати програм којим се за n учитаних целих бројева одређује по апсолутној вредности највећа разлика два суседна елемента.

Улаз: У првој улазној линији учитава се природан број n ($2 \leq n \leq 100$), а у следећим n целих бројева у интервалу [-100,100].

Излаз: Исписује се тражени број који представља највећу апсолутну разлику два суседна броја.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 -20 30 5 90 70	85

Решење

Задатак решавамо применом алгоритма одређивања максимума серије бројева (приказаног, на пример, у задатку Најнижа температура) на серију апсолутних разлика суседних елемената низа.

Да бисмо одредили све апсолутне разлике суседних елемената, довољно је да у сваком тренутку помоћу две променљиве памтимо два суседна елемента оригиналне серије. Поступамо на један од следећа два начина, које ћемо употребљавати и у наредним задацима, када год је потребно да поредимо свака два суседна елемента у серијама.

Ако поступамо на први начин, на почетку први елемент учитавамо као текућу вредност, а затим, у петљи која ће се извршити $n-1$ пута, пре учитавања нове текуће вредности тренутну текућу вредност памтимо као претходну, учитавамо текућу вредност и након тога обрађујемо претходну и текућу вредност.

```
ucitaj tekuci
ponovi n-1 puta:
  prethodni = tekuci
  ucitaj tekuci
  obradi(prethodni, tekuci)
```

У овом конкретном задатку комбинујемо овај алгоритам са алгоритмом одређивања максимума. Пошто апсолутна разлика суседних елемената не може бити мања од 0, ову вредност, пре петље, постављамо као почетни максимум (који ће бити и крајњи резултат ако су сви елементи који се учитавају једнаки). У сваком кораку петље рачунамо апсолутну вредност разлике између претходног и текућег елемента и проверавамо да ли је она већа од текуће вредности максимума. Ако јесте, максимум добија вредност њихове апсолутне разлике, у противном не мења вредност.

```
# u svakom trenutku pamtimo dva elementa serije:
# prethodni i tekući
tekuci = int(input())
maks = 0 # inicijalizujemo maksimum apsolutnih razlika na nulu
for i in range(1, n):
    prethodni = tekuci    # raniji tekući sada posaje prethodni
    tekuci = int(input()) # elementu koji sada učitavamo
    if abs(tekuci - prethodni) > maks: #  ako je potrebno
        maks = abs(tekuci - prethodni) #    ažuriramo maksimum
print(maks) # ispisujemo pronađeni maksimum
```

Ако поступамо на други начин, на почетку први елемент учитавамо као претходну вредност, а затим, у петљи која ће се извршити $n-1$ пута, учитавамо текућу вредност, обрађујемо претходну и текућу вредности и након тога текућу вредност памтимо као претходну, припремајући се тако за евентуалну наредну итерацију у којој ће текући елемент заиста бити претходни елементу који ће тада бити учитан.

```
ucitaj prethodni
ponovi n-1 puta:
  ucitaj tekuci
  obradi(prethodni, tekuci)
  prethodni = tekuci
```

У том облику решење може бити испрограмирано на следећи начин.

```
n = int(input()) # broj elemenata koji se učitavaju
# u svakom trenutku pamtimo dva elementa serije:
# prethodni i tekući
prethodni = int(input())
maks = 0 # inicijalizujemo maksimum apsolutnih razlika na nulu
for i in range(2, n+1):
    tekuci = int(input()) # učitavamo tekući element
    if abs(tekuci - prethodni) > maks: #  ako je potrebno
        maks = abs(tekuci - prethodni) #    ažuriramo maksimum
    prethodni = tekuci # tekući element postaje prethodni
                       # (onom elementu koji dolazi nakon njega)
print(maks) # ispisujemo pronađeni maksimum
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Провера монотоности

Током неколико дана маратонац се спрема за предстојећу трку. За сваки дан познато је растојање које је тог дана претрчао. Одредити да ли је тркач правио напредак тј. да ли су учитани бројеви уређени у строго растућем редоследу.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број N ($1 \leq N \leq 50$) који представља број дана, а у свакој од наредних N линија налази се по један природан број који представља број метара који је тркач претрчао одговарајућег дана.

Излаз: На стандардном излазу исписати одговор `Da` ако су бројеви у строго растућем поретку и одговор `Ne` у супротном.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
4	Da
19	
20	
22	
23	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
4	Ne
20	
20	
23	
23	

Решење

Желимо да утврдимо да су елементи серије претрчаних растојања тркача поређани у строго растућем поретку, тј. да проверимо да ли су сви елементи серије од другог до последњег строго већи од свог претходника. Решење се, дакле, заснива на примени алгоритма претраге, који смо увели у задатку Негативан број.

Довољно је упоредити свака два суседна елемента серије (претходни и текући) и проверити да ли је текући већи од претходног. За чување претходног и текућег елемента употребљавамо две променљиве. Можемо користити било који од два приступа описана у задатку Максимална разлика суседних. На пример, пре почетка петље, променљиву која чува претходни елемент низа иницијализоваћемо на први елемент серије (он постоји јер је серија по претпоставци задатка непразна). Затим у петљи чије се тело извршава $n - 1$ пута учитавамо један по један елемент серије у променљиву која чува текући елемент серије. На крају тела петље, елемент који је био текући проглашавамо претходним (да бисмо наредни елемент учитали у променљиву у којој се памти текући елемент и упоредили га са тренутно текућим елементом који постаје претходни). У телу петље поредимо претходни и текући. Ако је текући већи, актуелна растућа серија се наставља и не мењамо логички индикатор тј. променљиву `rastuci`, коју иницијализујемо на вредност `True`. Ако није, актуелна растућа серија је завршена, те мењамо логички индикатор тј. променљиву `rastuci` прогласимо за `False`. Пошто није неопходно учитати све елементе серије, чим установимо да је низ није растући можемо изаћи из петље (један начин да то урадимо је да услов петље ојачамо додавањем логичког индикатора `rastuci`, а други да употребимо наредбу `break`). По завршетку петље испитујемо вредност индикатора `rastuci` и у зависности од ње исписујемо одговарајућу поруку.

```
N = int(input()) # broj dana za koje se meri vreme plivača
rastuci = True   # da li je trenutno obrađeni deo niza strogo rastući
prethodno = int(input())     # prethodno vreme plivača
for i in range(1, N):
    tekuce = int(input())    # tekuće vreme plivača
    if prethodno >= tekuce:  # ako danas nije više plivao nego juče
      rastuci = False        #   niz nije rastući
      break                  #   prekidamo dalju analizu
    prethodno = tekuce       # tekuće vreme postaje prethodno
print("Da" if rastuci else "Ne")  # prijavljujemo rezultat
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Парно непарни

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Провера уређености остатака

Други начин да се провери дати услов је да се провери да ли остаци учитаних бројева при дељењу са два чине неопадајућу серију (серију у којој иду прво нуле, а затим јединице и никада се после јединице не јавља нула). Провера да ли је низ сортиран приказана је у задатку Провера монотоности и алгоритам је могуће засновати на некој од техника приказаних у том задатку.

```
OK = True                  # da li su karte dobro složene
prethodna = int(input())   # prethodna karta
while True:                # ponavljamo sledeći postupak
   try:
      tekuca = int(input()) # pokušavamo da učitamo tekuću kartu
   except EOFError:
```

```
        break                 # kraja ulaza, pa prekidamo petlju
    if prethodna % 2 > tekuca % 2: # prethodna je neparna, a tekuća parna
        OK = False                #   karte nisu dobro složene
        break                     #   prekidamo postupak
    prethodna = tekuca        # tekuća karta postaje prethodna
print("da" if OK else "ne") # ispisujemo rezultat
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Растуће цифре

Написати програм којим се испитује да ли су цифре декадног записа природног броја растуће идући од цифре најмање тежине (цифре јединица).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број од 0 до 100000.

Излаз: На стандардном излазу се исписује текстуални одговор DA или NE.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
97642	DA	79653	NE

Решење

Решење задатка комбинује алгоритам одређивање серије цифара броја сдесна налево који смо описали у задатку Број и збир цифара броја и алгоритам линеарне претраге којим проверавамо да ли у серији цифара броја постоји цифра која је није већа (већ је мања или једнака) од претходне (слично као у задатку Провера монотоности).

Током претраге, потребно је да одржавати две променљиве – једну која садржи вредност претходне и другу која садржи вредност текуће цифре броја. Вредност претходне цифре иницијализоваћемо пре петље. Најприродније решење је да се она иницијализује на вредност последње цифре броја (одређене као остатак при дељењу броја са 10) и да се пре уласка у петљу та последња цифра уклони (целобројним дељењем са 10).

У телу петље, које се извршава док број n има цифара тј. док не постане једнак нули, одређује и уклања се текућа цифра (последња цифра у тренутној вредности броја n). Ако се утврди да та цифра није већа од претходне, прекида се извршавање функције и враћа се вредност `False` - цифре нису у растућем поретку. На крају тела, врши се припрема за следећу итерацију тако што текућа цифра постаје претходна (вредност променљиве која чува текућу цифру додељује се променљивој која чува претходну цифру). Ако се не прекине извршавање петље (функције) зато што се појавила цифра која није већа од претходне, већ зато што су све цифре броја уклоњене (након што су подвргнуте траженој провери), функција враћа логичку вредност `True` - цифре су уређене у растућем поретку.

```
def rastuce_cifre(n):
    prethodna_cifra = n % 10
    n = n // 10
    while n > 0:
        tekuca_cifra = n % 10
        n = n // 10
        if tekuca_cifra <= prethodna_cifra:
            return False
        prethodna_cifra = tekuca_cifra
    return True

n = int(input())
print("DA" if rastuce_cifre(n) else "NE")
```

Задатак: Поређани датуми

Милица је направила списак рођендана својих другарица. Поређала је датуме њиховог рођења хронолошки (од најдавнијег до најскоријег). Напиши програм који проверава да ли је Милица то добро урадила.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се број n ($1 \leq n \leq 100$). У наредних n линија налази се n исправних, међусобно различитих датума. Датуми су записани тако што су записани дан, месец и година, раздвојени

размацима.

Излаз: У јединој линији стандардног излаза исписати `DA` ако су датуми исправно (растуће) поређани, тј. `NE` ако нису.

Пример

Улаз	*Излаз*

`3`
`3 7 2005`
`14 8 2006`
`10 5 2006`
	`NE`

Решење

Приметимо да је алгоритам који је потребно применити у овом задатку заправо идентичан оном примењеном у задатку Провера монотоности, једино што се уместо поређења бројева у овом задатку захтева поређење датума.

Потребно је проверити да ли у серији датума постоји неки који није после њему претходног. За то примењујемо алгоритам линеарне претраге (слично као у задатку Негативан број). Пошто се захтева поређење свака два суседна датума, потребно је да одржавамо претходни и текући датум. Као што је показано у задатку Максимална разлика суседних, на почетку је могуће иницијализовати претходни датум првим учитаним, на почетку петље учитавати текући датум, а онда на крају петље постављати претходни на тај текући или иницијализовати текући датум првим учитаним, на почетку петље постављати претходни датум на текући и након тога учитавати текући датум. У телу петље, након учитавања сваког текућег датума провераваћемо да ли је већи од претходног (да ли представља дан који долази хронолошки касније). Током претраге уводимо логичку промењиву која показује да ли су сви до сада учитани датуми у исправном редоследу и коју иницијализујемо `true`. Ако текући датум није већи од претходног, тада ту промењиву постављамо на `false` и прекидамо петљу (на пример, наредбом `break`). На крају петље, резултат пријављујемо у зависности од вредности те логичке промењиве.

Поредак између датума је лексикографски, ако се прво гледа година, затим месец и на крају дан (као што је то показано у задатку Пунолетство). Један начин да се ово реализује је да се сваки датум представи са три одвојена броја и да се, прегледности ради, поређење два датума издвоји у засебну функцију.

```
def posle(datum1, datum2):
    (d1, m1, g1) = datum1
    (d2, m2, g2) = datum2
    return (g1 > g2 or
            g1 == g2 and m1 > m2 or
            g1 == g2 and m1 == m2 and d1 > d2)

def citaj_datum():
    (d, m, g) = map(int, input().split())
    return (d, m, g)

n = int(input())
prethodni = citaj_datum()
poredjani = True
for i in range(1, n):
    tekuci = citaj_datum()
    if not posle(tekuci, prethodni):
        poredjani = False
        break
    prethodni = tekuci

print("DA" if poredjani else "NE")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Тестераст низ

За низ целих бројева одредити да ли је тестераст. Кажемо да је низ тестераст ако за његове чланове важи поредак $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, a_4 > a_5$ итд. или $a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4, a_4 < a_5$ итд.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број N ($2 \leq N \leq 100$). У следећих N линија налази се по један цео број из интервала од -10^9 до 10^9. Бројеви представљају елементе низа.

Излаз: На стандардни излаз приказати поруку `DA` ако низ јесте тестераст. Иначе приказати поруку `NE`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
6	DA
2	
1	
3	
2	
4	
3	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
6	NE
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Решење

Ово је још један од задатака у којем се проверава однос суседних елемената и који представља уопштење задатка Провера монотоности. Поново елементе читамо у петљи, одржавајући вредност претходног и текућег елемента серије и користимо алгоритам линеарне претраге (уведен у задатку Негативан број) да проверимо да ли у серији постоји елемент који нарушава задати однос. Разлика је у томе што уместо да стално проверавамо да ли је претходни елемент мањи од текућег, у овом случају наизменично проверавамо да ли је претходни елемент мањи од текућег, па да ли је претходни елемент већи од текућег итд.

Једно могуће решење је да се уведе помоћна логичка променљива која одређује да ли у наредном поређењу текући елемент треба да буде мањи или већи од претходног. Почетну вредност ове променљиве одређујемо на основу односа прва два елемента серије (њих морамо обрадити пре петље), а онда је у сваком кораку петље негирамо (ако се у једном кораку очекивало да претходни број буде мањи од текућег, у наредном кораку се очекује да претходни корак треба да буде већи од текућег). Приликом претраге поређење елемената се врши на основу текуће вредности те променљиве.

```
# broj clanova
n = int(input())

# dva uzastopna clana niza cuvamo u promenljivama prethodni i tekuci
# ucitavamo prva dva clana
prethodni = int(input())
tekuci = int(input())

# za sada nismo nasli na elemente ciji je odnos pogresan i za niz
# mozemo reci da trenutno jeste testerast
testerast = True

# ako je veci=True, tada naredni element treba da bude veci
# od prethodnog, a u suprotnom treba da bude manji od prethodnog

# na osnovu odnosa prva dva elementa odredjujemo kakav treba da
# bude odnos drugog i treceg elementa
if prethodni > tekuci:
    veci = False
elif prethodni < tekuci:
    veci = True
else:
    testerast = False

# obradjujemo ostale elemente dok ne obradimo svih n ili dok
# ne naidjemo na dva elementa u pogresnom redosledu
i = 2
```

```
while testerast and i < n:
    # ucitavamo naredni element
    prethodni = tekuci
    tekuci = int(input())
    # proveravamo da li je odnos trenutna dva ucitana elementa
    # pogresan
    if ((veci and not(prethodni > tekuci)) or
        (not veci and not(prethodni < tekuci))):
        testerast = False
    # odnos naredna dva broja treba da bude suprotan
    veci = not veci
    # prelazimo na naredni element
    i += 1

# prijavljujemo rezultat
if testerast:
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Пошто се у низу налазе бројеви, можемо понудити и мало другачије решење. Наиме, важи да је $x > y$ ако и само ако је $(-1) \cdot x < (-1) \cdot y$. Ако је $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4$ итд., тада је $1 \cdot a_1 < 1 \cdot a_2$, $(-1) \cdot a_2 < (-1) \cdot a_3$, $1 \cdot a_3 < 1 \cdot a_4$ итд. Обратно, ако важи $a_1 > a_2$, $a_2 < a_3$, $a_3 > a_4$ итд., тада важи $(-1) \cdot a_1 < (-1) \cdot a_2$, $1 \cdot a_2 < 1 \cdot a_3$, $(-1) \cdot a_3 < (-1) \cdot a_4$ итд. То значи да се провера да ли је низ тестераст своди на итеративно поређење релацијом мање узастопних елемената помножених наизменично са 1 па -1, односно -1 па 1 (те вредности памтимо у посебној бројевној променљивој чија почетна вредност зависи од односа прва два елемента низа, а која у сваком кораку петље мења знак). Нагласимо још и да је ово решење могло бити примењено зато што је условима задатка гарантовано да се на улазу не може јавити најмањи негативан број (проблем са њим је то што се множењем са -1 не може добити њему супротан број, јер се тај број обично не може исправно репрезентовати).

```
# broj clanova
n = int(input())

# dva uzastopna clana niza cuvamo u promenljivama prethodni i tekuci
# ucitavamo prva dva clana
prethodni = int(input())
tekuci = int(input())

# za sada nismo nasli na elemente ciji je odnos pogresan i za niz
# mozemo reci da trenutno jeste testerast
testerast = True

# znak odredjuje pozeljan odnos izmedju naredna dva elementa
# vrednost 1 ukazuje na to da prethodni treba da bude manji od tekuceg,
# a -1 da prethodni treba da bude veci od tekuceg

# na osnovu odnosa prva dva elementa odredjujemo znak za odnos
# drugog i treceg i tako nadalje
if prethodni > tekuci:
    znak = 1
elif prethodni < tekuci:
    znak = -1
else:
    testerast = False

# obradjujemo ostale elemente dok ne obradimo svih n ili dok
# ne naidjemo na dva elementa u pogresnom redosledu
i = 2
```

```
while testerast and i < n:
    # ucitavamo naredni element
    prethodni = tekuci
    tekuci = int(input())
    # proveravamo da li je odnos trenutna dva ucitana elementa
    # pogresan
    if znak * prethodni >= znak * tekuci:
      testerast = False
    # odnos naredna dva broja treba da bude suprotan
    znak = -znak
    # prelazimo na naredni element
    i += 1

# prijavljujemo rezultat
if testerast:
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Још једно решење је да се у сваком тренутку памте три узастопна елемента низа (рецимо леви, средњи и десни) и да се проверава да ли је у сваком кораку знак разлике између десног и средњег различит од знака разлике између средњег и левог (испитивање да ли су два броја истог знака смо дискутовали у задатку Два броја истог знака).

```
def razlicitogZnaka(x, y):
    return (x < 0 and y > 0 or
            x > 0 and y < 0)
  # pošto nema opasnosti od prekoracenja, moglo bi i
  # return x * y < 0

# broj clanova
n = int(input())

# tri uzastopna clana niza su levi, srednji, desni

# ucitavamo prva dva clana
levi = int(input())
srednji = int(input())

# za sada nismo nasli na elemente ciji je odnos pogresan i za niz
# mozemo reci da trenutno jeste testerast (osim ako su prva dva
# elementa jednaka)
testerast = levi != srednji

i = 3
while testerast and i <= n:
    # ucitavamo naredni element
    desni = int(input())
    # proveravamo tekuci "zubac testere"
    if not razlicitogZnaka(srednji - levi, desni - srednji):
        testerast = False
    # pripremamo se za naredni korak
    levi = srednji; srednji = desni
    # prelazimo na naredni element
    i += 1

# prijavljujemo rezultat
if testerast:
    print("DA")
```

```
else:
    print("NE")
```

Задатак: Продужавање титлова

Станислав је ђак првог разреда и тек учи да чита. Покушава да прочита титлове на цртаном филму који гледа током карантина, али му често недостаје неколико секунди да би их прочитао до краја. Његова сестра жели да му помогне тако што ће продужити трајање сваког титла за пет секунди. Међутим, некада је пауза до наредног титла краћа од 5 секунди, па да се титлови не би преклапали, она титл продужава тачно до почетка наредног. Последњи титл се сигурно може продужити за 5 секунди. Пошто је филм дугачак, ово је напоран посао. Напиши програм који би Станислављевој сестри помогао да овај посао брже заврши.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси укупан број титлова n ($1 \leq n \leq 1000$), и након тога у наредних n линија подаци о титловима. За сваки титл се уноси време почетка и време краја (у односу на почетак филма), раздвојени размаком. Свако време задато је у облику `hh:mm:ss`. Филм не траје дуже од 3 сата.

Излаз: На стандардни излаз исписати податке о продуженим титловима (у истом формату у ком су унети).

Пример

Улаз	*Излаз*
5	5
00:01:43 00:01:48	00:01:43 00:01:53
00:01:56 00:01:59	00:01:56 00:02:04
00:02:17 00:02:23	00:02:17 00:02:24
00:02:24 00:02:26	00:02:24 00:02:30
00:02:30 00:02:38	00:02:30 00:02:43

Решење

Подацима о времену најједноставније можемо баратати ако их претворимо у секунде (протекле од претходне поноћи), слично као у задатку Поноћ. Једноставности ради, издвојићемо функције за учитавање и испис времена и података о титлу (време почетка и краја). Након учитавања података претворићемо их у секунде, а пре исписивања ћемо их претворити у сате, минуте и секунде.

Титлове ћемо обрађивати у петљи и у сваком тренутку ћемо одржавати податке о текућем и наредном титлу. Текући титл ћемо учитати пре петље, а затим ћемо у петљи $n - 1$ пута учитавати наредни титл, поправљати текући (знајући време почетка наредног) и након тога наредни проглашавати текућим за следећу итерацију. Сваки текући титл у петљи обрађујемо тако што препишемо време почетка и мање од увећаног времена завршетка и времена почетка наредног титла. Последњи титл ћемо обрадити након петље, тако што ћемо преписати време почетка и увећано време завршетка.

4.3 Угнежђене петље

Унутар тела петље може се налазити друга петља. За такве петље кажемо да су *угнежђене*. У сваком кораку (свакој итерацији) спољашње петље унутрашња петља се извршава изнова. У наредним задацима приказаћемо употребу угнежђених петљи.

4.3.1 Генерисање свих могућности (варијације, комбинације, пермутације, партиције)

Многи практични задаци решавају се тако што се наброје и испитају све могућности. Свака могућност се често може представити неком уређеном торком елемената. На пример, ако посматрамо могуће исходе бацања две коцкице, сваки исход се може представити уређеним паром бројева од 1 до 6. Када је торка мале дужине (двочлана, трочлана, четворочлана), тада све могућности можемо излистати помоћу угнежђених петљи. Ту ћемо технику приказати помоћу наредних задатака (кроз њих ћемо се и упознати са основним комбинаторним објектима: варијацијама, комбинацијама, партицијама, цикличким пермутацијама).

Задатак: Бројеви у датој основи

Бројеви у основи b се могу записати помоћу цифара $0, 1, \ldots, b - 1$. Ако је основа већа од 10, тада се уместо цифара користе слова енглеске абецеде (цифра 10 записује се са a, цифра 11 са b итд.). Напиши програм који исписује све троцифрене бројеве у датој основи.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава основа b ($2 \leq b \leq 16$).

Излаз: На стандардни излаз исписати све троцифрене бројеве у основи b, поређане растући по вредности (бројеве исписати са водећим нулама).

Пример

Улаз	*Излаз*
2	000 001 010 011 100 101 110 111

Решење

На сваком од три места могуће је исписати било коју цифру од 0 до $b-1$. Стога решење можемо једноставно постићи помоћу три угнежђене петље - по једну за сваку од три цифре. Тројке цифара ће бити лексикографски растући уређене, што ће тачно одговарати редоследу бројева по величини, како се тражи у задатку.

Пошто ће се користити и основе веће од 10, потребно је да направимо и функцију која ће на основу нумеричке вредности цифре одредити карактер који представља ту цифру. Имплементација те функције захтева баратање са карактерским типом података (слично као, на пример, у задацима Трансформација карактера и Абецедно огледало).

- Ако је вредност цифре мања од 10, карактер добијамо тако што саберемо кôд (ASCII тј. Unicode) карактера `0` са вредношћу цифре.
- Ако је вредност цифре већа од 10, карактер добијамо тако што саберемо кôд карактера `a` са вредношћу цифре умањеном за 10.

Рецимо и да се у овом задатку заправо врши генерисање и исписивање свих *варијација са понављањем* дужине 3 са b елемената. Варијације без понављања размотрене су у задатку Варијације тројки.

```
def cifra(c):
    return chr(ord('0') + c) if c < 10 else chr(ord('a') + c - 10)

b = int(input())
for c2 in range(b):
    for c1 in range(b):
        for c0 in range(b):
            print(cifra(c2) + cifra(c1) + cifra(c0))
```

Задатак: Варијације тројки

Сваки од три другара има одређени број јабука, али никоја два од њих немају исти број јабука. Ако се зна највећи могући број јабука који сваки од другара може да има, напиши програм који исписује све могуће тројке бројева јабука које они могу да имају.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 20$) - највећи број јабука које сваки од другара може да има.

Излаз: На стандардни излаз исписати све могуће бројеве јабука које другови могу да имају, уређене лексикографски.

Пример

Улаз	*Излаз*
2	0 1 2 0 2 1 1 0 2 1 2 0 2 0 1 2 1 0

Решење

У задатку се тражи набрајање свих *варијација без понављања* дужине 3 од n елемената. Најлакши начин да се оне наброје је да се употребе три угнежђене петље - по једна за сваког од три другара. Бројач сваке петље (обележимо их са d_1, d_2 и d_3) узима редом вредности од 0 до n. Ако би се у телу унутрашње петље вршио испис вредности променљивих, излистале би се све варијације (па и оне са понављањем). Да би се избегло понављање, потребно је пре исписа проверити да ли у вредности све три променљиве различите тј. да ли важи да је $d_1 \neq d_2$ и $d_1 \neq d_3$ и $d_2 \neq d_3$. Приметимо да се овде заправо ради о филтрирању, тј. издвајању само оних елемената који задовољавају неко дато својство (слично као у задатку). Услов $d_1 \neq d_2$ има смисла проверити пре него што се уопште уђе у трећу петљу.

```
n = int(input())
for d1 in range(n + 1): # broj jabuka prvog
    for d2 in range(n + 1): # broj jabuka drugog
        if d1 != d2:
            for d3 in range(n + 1): # broj jabuka treceg
                if d1 != d3 and d2 != d3:
                    print(d1, d2, d3)
```

Задатак: Мали лото

У једном одељењу су одлучили да у склопу новогодишње приредбе организују мало извлачење игре лото. Да би повећали шансе за добитак, одлучили су да се извлаче само три куглице. Напиши програм који исписује које све комбинације могу бити извучене, ако се зна да у бубњу има n различитих куглица обележених бројевима од 1 до n.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($4 \leq n \leq 20$).

Излаз: На стандардни излаз испиши све комбинације, при чему су бројеви у свакој комбинацији сортирани растуће, а комбинације су лексикографски сортиране.

Пример

Улаз	*Излаз*
4	1 2 3
	1 2 4
	1 3 4
	2 3 4

Решење

Већ је у тексту задатка наглашено да се у овом задатку тражи исписивање свих *комбинација* (пошто су у игри лото сви бројеви различити, ради се о *комбинацијама без понављања*).

Најједноставније решење подразумева три угнежђене петље, по једну за сваку од три лоптице. Спољашња петља набрајаће редом бројеве на првој лоптици, средња на другој, а унутрашња на трећој, при чему су лоптице сортиране растући, како се тражи у тексту задатка. Стога бројач средње петље увек мора бити већи од бројача спољашње, а бројач унутрашње петље увек мора бити већи од бројача средње петље. Зато границе за прву бројачку променљиву b_1 можемо поставити на 1 до n, средњу b_2 на $b_1 + 1$ до n, а унутрашњу b_3 на $b_2 + 1$ до n. Заправо, горње границе су мало мање (за спољашњу је то $n - 2$, а средњу $n - 1$), међутим, и за границе n програм ће радити коректно, јер ће нека од унутрашњих петљи бити празна (на пример, за $b_1 = n$, b_2 креће од $n + 1$ и траје док је $b_2 \leq n$, што је у самом старту нарушено).

```
n = int(input())
for b1 in range(1, n+1): # broj na loptici 1
    for b2 in range(b1+1, n+1): # broj na loptici 2
        for b3 in range(b2+1, n+1): # broj na loptici 3
            print(b1, b2, b3)
```

Задатак: Коцкице за јамб

Исписати све резултате бацања три коцкице за јамб у којима је збир бројева једнак задатом броју X (природан број од 3 до 18) ако је редослед коцкица битан (на пример, 2, 2, 3 није исто као 2, 3, 2).

Улаз: У једној линији стандардног улаза наводи се природан број X ($3 \leq X \leq 18$) који представља збир бројева на којима су се зауставиле коцкице.

Излаз: У свакој линији стандардног излаза исписују се три природна броја (бројеви од 1 до 6) који представљају резултат бацања три коцкице. Резултате приказати сортиране лексикографски (у растућем редоследу троцифрених бројева који се формирају од три цифре на коцкицама).

Пример

Улаз	*Излаз*
5	1 1 3
	1 2 2
	1 3 1
	2 1 2
	2 2 1
	3 1 1

Решење

Ако са a, b и c обележимо бројеве који су добијени на три коцкице важи да је $a+b+c = X$, и да је $1 \leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$ и $1 \leq c \leq 6$. Проблем разлагања броја на збир неколико бројева назива се *партиционисање* тј. проналажења *партиција* броја. У овом случају разматрамо партиције дужине 3 (партиције на тачно три сабирка).

Три петље

Наивно решење је да се помоћу три угнежђене петље наброје све могућности од 1 до 6 за a, b и c и да се у телу унутрашње петље проверава да ли је $a + b + c = X$.

```
# zbir tri broja na kockicama
X = int(input())
for a in range(1, 6 + 1): # vrednost na prvoj kockici
    for b in range(1, 6 + 1): # vrednost na drugoj kockici
        for c in range(1, 6 + 1): # vrednost na trecoj kockici
            if a + b + c == X: # ako je zbir jednak datom
                print(a, b, c) #   ispisujemo resenje
```

Две петље

Бољи приступ је испробавати само све могућности за a и b, а онда израчунавати c као $X - a - b$ и проверавати да ли добијени резултат припада интервалу од 1 до 6.

Пажљивијом анализом можемо границе у петљама додатно оптимизовати, али пошто је укупан број могућности мали и ово решење је сасвим довољно ефикасно.

```
X = int(input()) # zbir tri broja na kockicama
for a in range(1, 6 + 1): # vrednost na prvoj kockici
    for b in range(1, 6 + 1): # vrednost na drugoj kockici
        c = X - a - b # broj takav da je a+b+c = X
        if 1 <= c and c <= 6: # ako c može da bude vrednost na
                              # trećoj kockici
            # ispisujemo rešenje
            print(a, b, c)
```

Задатак: Комбинације поена

На кошаркашкој утакмици кошеви се бодују са 1, 2 или 3 поена. Потребно је одредити све комбинације броја кошева који су бодовани са 1 поеном, са 2 и са 3 поена ако је познат укупан број поена једног тима на кошаркашкој утакмици.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се укупан број поена на кошаркашкој утакмици (природан број између 40 и 150).

Излаз: Свака линија стандардног излаза треба да садржи број кошева који су бодовани са 3, затим са 2 и на крају са 1. Комбинације треба да буду уређене лексикографски.

Пример

Улаз	*Излаз*
6	6 0 0 6 0 1 4 0 2 2 0 3 0 1 0 3 1 1 1 2 0 0

Решење

Овај задатак је донекле сличан, на пример, задатку Коцкице за јамб (и овај пут се ради о партиционисању, али овај пут су сабирцима придружене тежине 1, 2 и 3), па ће и технике које ћемо применити у решењу донекле бити сличне онима примењеним у тим задацима.

Три петље

Једно решење је да помоћу три угнежђене петље испитамо све могућности за број кошева са три поена (t), број кошева са два поена (d) и број кошева за један поен (j). Ако је број поена p, границе ових променљивих веома грубо можемо одредити ако приметимо да број кошева са 1 поеном j може имати вредности целих бројева од 0 до p, пошто мора да важи да је $2 \cdot d \leq p$, број кошева са 2 поена d може имати вредности целих бројева од 0 до $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, тј. до вредности целобројног количника бројева p и 2 (види задатак Поклони), а пошто мора да важи да је $3 \cdot t \leq p$, број кошева са 3 поена може имати вредности од 0 до $\lfloor \frac{p}{3} \rfloor$.

Због траженог редоследа приказивања прво фиксирамо број t узимајући све могуће вредности од најмање (то је 0) до највеће (то је $\lfloor \frac{p}{3} \rfloor$), па затим број ($d$) од најмање вредности (то је 0) до највеће (то је $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$) и на крају број кошева са 1 поеном (j) од најмање вредности (то је 0) до највеће (то је p). У телу унутрашње петље проверавамо да ли је укупан број поена једнак вредности p (тј. проверавамо да ли је услов $3 \cdot t + 2 \cdot d + j = p$ испуњен).

```
poeni = int(input())
for t in range(poeni // 3 + 1):
    for d in range(poeni // 2 + 1):
        for j in range(poeni + 1):
            if 3 * t + 2 * d + j == poeni:
                print(t, d, j)
```

Две петље

Мало прецизнијом анализом можемо добити ефикаснији програм. Наиме, горњу границу променљиве t одређујемо из услова $3 \cdot t \leq p$ и добијамо вредност $\lfloor \frac{p}{3} \rfloor$. Пошто мора да важи да је $3 \cdot t + 2 \cdot d \leq p$, за фиксирану вредност t, границу за променљиву d можемо одредити као $\lfloor \frac{p-3 \cdot t}{2} \rfloor$. Такође, ако су познате вредности t, d и p, из услова $3 \cdot t + 2 \cdot d + j = p$ можемо израчунати да је $j = p - 3 \cdot t - 2 \cdot d$, чиме избегавамо унутрашњу (трећу) петљу и непотребно испитивање различитих нетачних вредност за j.

```
poeni = int(input())
for t in range(poeni // 3 + 1): # 3*t <= poeni
    for d in range((poeni - 3*t) // 2 + 1): # 3*t + 2*d <= poeni
        j = poeni - (3*t + 2*d)
        print(t, d, j)
```

```
poeni = int(input())
t = 0
while 3 * t <= poeni:
    d = 0
    while 3*t + 2*d <= poeni:
        j = poeni - (3*t + 2*d)
        print(t, d, j)
        d += 1
    t += 1
```

Задатак: Цикличне пермутације

Цикличним померањем за једно место улево низа бројева $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ добијамо $x_2, x_3, ..., x_n, x_1$, ако вршимо циклично померање за два места улево добијамо $x_3, ..., x_n, x_1, x_2$. Добијени низови представљају цикличне пермутације полазног низа.

Написати програм којим се за дати природан број n приказују низови бројева добијени цикличним померањем низа бројева 1, 2, …, n редом за 0, 1, 2, …, $n-1$ места улево.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи природан број $n \leq 30$.

Излаз: Стандардни излаз садржи n линија, у којима су приказани тражени низови бројева, бројеви у низовима међусобно су одвојени бланко знаком.

Пример

Улаз	*Излаз*
4	1 2 3 4 2 3 4 1 3 4 1 2 4 1 2 3

Решење

Потребно је за свако i која узима вредности од 1 до n приказати низ бројева облика $i, i+1, ..., n, 1, 2, ..., i-1$.

Задатак можемо решити петљом у којој коришћењем бројачке променљиве i која узима вредности од 1 до n, прво прикажемо једном петљом бројеве од i до n, а затим другом петљом бројеве од 1 до $i-1$.

```
n = int(input())
for i in range(1, n+1):
    for j in range(i, n+1):
        print(j, ” ”, sep=””, end=””)
    for j in range(1, i):
        print(j, ” ”, sep=””, end=””)
    print()
```

Приметимо да бројеве $i, i+1, ..., n, 1, 2, ..., i-1$ можемо приказати у једној петљи, увећавањем бројачке променљиве редом за 0, 1, …, $n-1$ и коришћењем остатка при дељењу са n (пошто петља креће од 1, а не од 0, од збира i и j потребно је одузети 1, пронаћи остатак, а затим додати 1, слично као што је то приказано у задатку Сат).

```
n = int(input())
for i in range(1, n+1):
    for j in range(0, n):
        print((i + j - 1) % n + 1, ” ”, sep=””, end=””)
    print()
```

Такође, у унутрашњој петљи можемо водити посебну променљиву која чува вредност која се исписује. Ту променљиву постављамо на вредност i и након сваког исписа је увећавамо за 1, при чему проверавамо да ли је након увећања вредност већа од n. Ако јесте, враћамо је на вредност 1.

```
n = int(input())
for i in range(1, n+1):
    p = i
    for j in range(0, n):
        print(p, ” ”, sep=””, end=””)
        p += 1
        if p > n:
            p = 1
    print()
```

Задатак: Троуглови целобројних страница, задатог обима

Написати програм којим се одређују дужине страница троуглова a, b, c, такве да су a, b и c природни бројеви за које важи да је $a \leq b \leq c$ и да је обим троугла $a+b+c$ једнак датом природном броју O.

Улаз: У једној линији стандардног улаза задат је природан број O ($3 \leq O \leq 250$) који представља обим троугла.

Излаз: У свакој линији стандардног излаза налазе се три природна броја одвојена празнином, који представљају могуће дужине страница троугла задатог обима. Тројке треба да буду лексикографски сортиране.

Пример

Улаз	*Излаз*
7	1 3 3
	2 2 3

4.3.2 Сви подсегменти серије

Задатак: Сви суфикси низа бројева од 1 до n

Својевремено је постојала реклама за фирму "Југодрво" у којој се појављивала песмица "Југодрво-угодрво-годрво-одрво-дрво-рво-во-о" у којој су се одређивали сви суфикси дате речи. Слично, али мало једноставније је исписати све суфиксе низа природних бројева од 1 до n. Напиши програм који за дато n исписати све чланове низа $1, 2, 3, \ldots, n, 2, 3, 4, \ldots, n, 3, 4, \ldots, n, \ldots, n-1, n, n$.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број n у границама од 1 до 30.

Излаз: Бројеви се исписују на стандардни излаз, раздвојени размацима, сваки суфикс у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
4	1 2 3 4
	2 3 4
	3 4
	4

Решење

Ако је n учитана вредност (број сегмената), прво је потребно исписати све бројеве од 1 до n, затим бројеве од 2 до n и тако даље, док се на крају не испишу бројеви од $n-1$ до n и затим бројеви од n до n тј. само број n. Дакле, за сваку вредност i од 1 до n треба исписати све вредности од i до n. Пошто се све вредности од i до n могу исписати исписати коришћењем петље (као у задатку Бројеви од a до b), задатак можемо решити коришћењем угнежђених петљи. Спољашњом петљом, чија променљива i узима вредности од 1 до n, обезбеђујемо n извршавања унутрашње петље чија променљива j узима вредности од i до n, док у сваком кораку унутрашње петље исписујемо вредност његове променљиве j.

```
n = int(input()) # broj segmenata
for i in range(1, n+1): # redni broj segmenta
    for j in range(i, n+1): # ispis elemenata i-tog desnog segmenta
        print(j, end=" ")
    print()
```

Задатак: Сви префикси низа бројева од 1 до n

За дато n исписати све префиксе низа природних бројева који почињу са 1 и завршавају се са бројем мањим или једнаким од n.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава цео број n ($1 \leq n \leq 20$).

Излаз: На стандардни излаз исписати све тражене префиксе, сваки у посебном реду у растућем редоследу дужина. Иза сваког елемента сваког префикса треба да буде исписан по један размак.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	1
	1 2
	1 2 3

Решење

Задатак је веома сличан задатку и једноставно се решава помоћу две угнежђене петље. Спољна петља набраја све десне крајеве i префикса (то су редом бројеви од 1 до n), а у унутрашњој се набрајају елементи префикса (то су редом бројеви од 1 до i).

```
n = int(input())
for i in range(1, n+1):
    for j in range(1, i+1):
        print(j, ” ”, end=””, sep=””)
    print()
```

Задатак: Све подречи

Напиши програм који ће исписати све подречи дате речи и то у растућем редоследу почетних позиција и растућем редоследу дужине. Напомена: у већини језика је слово на позицији `i` речи `s` могуће очитати изразом `s[i]`.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава једна реч састављена само од малих слова енглеске абецеде.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражене подречи, сваку у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*

`abc`	`a`
	`ab`
	`abc`
	`b`
	`bc`
	`c`

Решење

Пошто је редослед такав да се прво исписују све подречи које почињу на позицији 0, затим све подречи на позицији 1 итд., у спољашњој петљи вршићемо итерацију кроз почетни индекс сваке подречи и бројачка променљива i ће узимати редом вредности од 0 до $n-1$, где је n дужина речи. У језику Пајтон њу можемо одредити функцијом `len`. У унутрашњој петљи ћемо вршити итерацију кроз завршни индекс сваке подречи и бројачка променљива те петље ће редом узимати вредности од i па до $n-1$.

Када је фиксиран сегмент $[i, j]$ подреч можемо исписивати карактер по карактер у новој петљи.

```
s = input()
for i in range(len(s)):
    for j in range(i, len(s)):
        for k in range(i, j + 1):
            print(s[k], sep='', end='')
        print()
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Све подречи дужине n

Дата је реч и природан број n. Напиши програм који исписује све њене подречи (сегменте узастопних карактера) дужине n.

Улаз: Први ред стандардног улаза садржи реч састављену од малих слова енглеског алфабета, а други садржи број n.

Излаз: На стандардни излаз исписати све тражене подречи, с лева на десно, сваку у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*

`abcdef`
`3`
	`abc`
	`bcd`
	`cde`
	`def`

Решење

Претпоставимо да је реч дужине m и да се траже подречи дужине n. Ако подреч почиње на позицији i тада су њени карактери на позицијама $i, i+1, \ldots i+n-1$. Почетне позиције i подречи крећу од нуле и увећавају се све док је последњи карактер подречи унутар речи тј. док је $i+n-1 < m$ односно $i < m-n+1$.

У унутрашњој петљи можемо итерацију вршити по j које узима вредности од i до $i+n-1$ или по j које узима вредности од 0 до $n-1$, али се тада исписује карактер на позицији $i+j$.

```
s = input()
n = int(input())
for i in range(0, len(s) - n + 1):
    for j in range(0, n):
        print(s[i+j], end="", sep="")
    print()
```

Задатак: Све подречи по опадајућој дужини

За унету реч исписати све подречи у редоследу опадајуће дужине и растућих левих граница за речи исте дужине.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси једна реч састављена само од малих слова енглеске абецеде.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражене подречи, сваку у посебном реду.

Пример

Улаз	*Излаз*
abc	abc
	ab
	bc
	a
	b
	c

Решење

Бројачка променљива d спољашње петље одређиваће дужину подречи и узимаће вредности од n па уназад до 1, док ће унутрашња бројачка променљива i одређивати индекс почетка подречи и узимаће вредности од 0 па све док је $i+d < n$.

Знајући почетак и дужину подречи саму подреч можемо исписати помоћу нове петље у којој се исписује један по један њен карактер.

```
s = input()
# duzina reci
for d in range(len(s), 0, -1):
    # rec duzine d je odredjena indeksima [i, i + d - 1]
    for i in range(len(s) - d + 1):
        for j in range(i, i+d):
            print(s[j], end="")
        print()
```

Задатак: Цикличне подречи

Напиши програм који исписује све подречи које се могу добити читањем слова дате речи кренувши од неког слова, у круг, назад до тог слова.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава реч састављена од малих слова, не дужа од 100 карактера.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражене цикличне пермутације те речи.

Пример

Улаз	*Излаз*

`zdravo`	`zdravo`
	`dravoz`
	`ravozd`
	`avozdr`
	`vozdra`
	`ozdrav`

4.3.3 Цртежи помоћу карактера

Задатак: Квадрат од звездица

Напиши програм који исцртава квадрат од карактера * (као што је приказано у примерима).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број n ($1 \leq n \leq 20$), који представља димензију квадрата (број звездица у свакој врсти и колони).

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени цртеж.

Пример

Улаз	*Излаз*
`4`	`****` `****` `****` `****`

Решење

Можемо приметити да се квадрат састоји од n редова, а да се у сваком реду налази n звездица. Зато програм можемо организовати помоћу угнежђених петљи. Спољна петља се извршава n пута и у њеном телу се исписује један ред. То се врши тако што се у телу унутрашње петље која се извршава n пута исписује једна звездица, а након те унутрашње петље се исписује прелазак у нови ред. У језику Пајтон 3 звездица исписује помоћу `print("*", sep="", end="")` а прелазак у нови ред помоћу `print()` (додатним параметрима `sep` и `end` подешавамо шта се исписује између наведених параметара и шта се исписује на крају).

```
n = int(input())
for i in range(n):                  # ponavljamo n puta
    for j in range(n):              #   crtamo n zvezdica u istom redu
        print("*", sep="", end="")
    print()                         #   prelazimo u novi red
```

Задатак: Троугао од звездица

Напиши програм који исцртава троугао какав је приказан у примеру.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава један природан број n ($1 \leq n \leq 30$), који представља висину троугла (број редова које цртеж садржи).

Излаз: На стандардни излаз се исписује тражени троугао, исписивањем карактера *, размака (карактера бланко) и преласка у нови ред. После сваке последње звездице у свакој врсти прећи у наредни ред (не исписивати размаке после звездица).

Пример

Улаз	*Излаз*

`4`	`   *`
	`  ***`
	`*****`
	`*******`

Решење

За дати број n троугао садржи n редова. Сваки ред ћемо исписивати у петљи у којој променљива i мења вредност од 0 до $n-1$. Размотримо случај $n = 4$. У првом реду (када је $i = 0$) потребно је исписати три размака и једну звездицу, у другом (када је $i = 1$) потребно је исписати два размака и три звездице, у трећем (када је $i = 2$) потребно је један размак и пет звездица и у четвртом (када је $i = 3$) потребно је исписати

нула размака и седам звездица. Може се закључити да је број размака једнак $n - i - 1$, а број звездица једнак $2i + 1$ (иако је извођење ових релација прилично очигледно, можемо приметити да број размака чини аритметички низ који креће од $n - 1$ и чија је разлика суседних елелемената -1, док број звездица чини аритметички низ који креће од 1 и чија је разлика суседних елемената 2 и везе извести на основу формула за i-ти члан аритметичког низа). Исписивање датог броја појављивања неког карактера можемо реализовати једноставно у петљи. Тако задатак можемо решити помоћу две унутрашње петље (једне у којој се исписују размаци и једне у којој се исписују звездице).

```
n = int(input())
for i in range(n):
    for j in range(n-i-1):
        print(” ”, sep=””, end=””)
    for j in range(2*i+1):
        print(”*”, sep=””, end=””)
    print()
```

Једноставности ради исписивање датог броја појављивања неког карактера можемо реализовати у засебној функцији, коју ћемо онда позвати у различитим контекстима (једном за исписивање $n - i - 1$ размака, а други пут за исписивање $2i + 1$ звездица). Након исписа звездица, као последњи корак тела спољашње петље потребно је да пређемо у наредни ред.

```
def ispisi_n_puta(c, n):
    for i in range(n):
        print(c, sep=””, end=””)

n = int(input())
broj_razmaka = n-1
broj_zvezdica = 1
for i in range(n):
    ispisi_n_puta(” ”, broj_razmaka)
    broj_razmaka -= 1
    ispisi_n_puta(”*”, broj_zvezdica)
    broj_zvezdica += 2
    print()
```

Број звездица и размака није неопходно експлицитно израчунавати, већ је могуће одржавати две посебне променљиве у којима се памте ови бројеви.

```
n = int(input())
broj_razmaka = n-1
broj_zvezdica = 1
for i in range(n):
    for j in range(broj_razmaka):
        print(” ”, sep=””, end=””)
    broj_razmaka -= 1
    for j in range(broj_zvezdica):
        print(”*”, sep=””, end=””)
    broj_zvezdica += 2
    print()
```

Задатак: Троугао од речи

Напиши програм који исцртава троугао чије су ивице састављене од карактера дате речи. Реч се добија читањем слова са леве и десне ивице троугла наниже, док се на доњој ивици налази палиндром чија је десна половина та дата реч.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава реч дужине између 3 и 20 карактера.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени троугао.

Пример

Улаз *Излаз*

```
bravo         b
             r r
            a   a
           v     v
          ovarbravo
```

Решење

Можемо приметити да постоје три суштински различита случаја. Нека је n дужина речи.

У првом реду се исписује $n - 1$ размака и прво слово речи.

Нека су наредни редови обележени бројевима од 1 до $n - 2$ тј. нека у петљи променљива i узима вредности од 1 до $n - 2$. У телу те петље исписујемо прво $n - i - 1$ размака, затим слово речи на позицији i, након тога $2 \cdot i - 1$ размака и поново слово на позицији i.

На крају, у последњем реду исписујемо слова речи на позицијама од $n - 1$ до 0 и затим од 1 до $n - 1$.

```
def ispisi_n_puta(c, n):
    for i in range(n):
        print(c, sep="", end="")

s = input()
n = len(s)

ispisi_n_puta(" ", n-1)
print(s[0])

for i in range(1, n-1):
    ispisi_n_puta(" ", n-1-i)
    print(s[i], sep="", end="")
    ispisi_n_puta(" ", 2*i-1)
    print(s[i])

print(s[n-1:0:-1] + s[0:n])
```

Задатак: Ромб од звездица

Напиши програм који исписује ромб направљен од звездица (како је приказано у примеру).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси природан број n ($3 \leq n \leq 20$), који представља димензију ромба (број врста и колона).

Излаз: На стандардни излаз исцртати ромб.

Пример

Улаз *Излаз*

```
5             *****
             *****
            *****
           *****
          *****
```

Задатак: Ћилим од звездица

Напиши програм који који исцртава ћилим састављен од звездица (квадрат из чије је средине уклоњен ромб, како је приказано у примерима).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 20$).

Излаз: На стандардни излаз исписати ћилим.

Пример 1

Улаз
```
3
```
Излаз
```
******
**  **
*    *
**  **
******
```

Пример 2

Улаз
```
4
```
Излаз
```
********
***  ***
**    **
*      *
**    **
***  ***
********
```

Задатак: V од звездица

Напиши програм који који исцртава латиничко слово V састављено од звездица. Слово се простгире у n редова и n колона.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 20$).

Излаз: На стандардни излаз исписати звездице, као у примерима.

Пример 1

Улаз
```
3
```
Излаз
```
*   *
*   *
 * *
 * *
  *
  *
```

Пример 2

Улаз
```
4
```
Излаз
```
*      *
*      *
 *    *
 *    *
  *  *
  *  *
   **
   **
```

4.3.4 Генерисање неких правилних серија

Задатак: Карирана застава

На часу ликовног ђаци су добили задатак да за предстојећу трку око центра града, од већ постојећих квадратних комада старих застава, направе правоугаону заставу димензија која ће, као што је на аутомобилским тркама обичај бити карирана, црно-бела. Након завршеног шивења, видели су да им није баш све ишло од руке. Циљ који треба да постигну је да ниједно црно поље нема за суседно бело, и обрнуто (суседна поља су лево, десно, горње и доње) и зато морају још да префарбају поља заставе која нису ваљана са што мање боје. Напиши програм који одређује колико најмање поља морају да офарбају.

Улаз: У првој линији улаза налазе се два цела броја одвојена размаком r и k ($1 \leq r, k \leq 3000$), број редова и број колона заставе. Следећих r редова садржи по k знакова `C` или `B` (без размака).

Излаз: У једини ред излаза треба исписати један цео број који представља минималан број квадратних делова заставе које је потребно префарбати да би се добила црно бела карирана застава.

Пример 1

Улаз
```
3 3
CCC
CCC
CCC
```
Излаз
```
4
```

Пример 2

Улаз
```
3 4
CBCB
BCBC
CBCB
```
Излаз
```
0
```

Пример 3

Улаз
```
4 2
BC
BC
CB
BC
```
Излаз
```
2
```

Решење

Постоје само два начина да се застава тако офарба, па да она буде црно бела карирана: поље на позицији (0, 0) може да буде бело и може да буде црно.

У варијанти у којој је поље на позицији (0, 0) бело, сва бела поља на позицијама (i, j) где је $i + j$ паран број и сва црна поља на позицијама (i, j) где је $i + j$ непаран број су добро обојена. Ако знамо број таквих поља m, тада можемо једноставно одредити тражено решење задатка. Наиме, ако је поље на позицији (0, 0) бело, тада треба префарбати само сва остала поља (њих $R \cdot C - m$), а ако је поље на позицији $(0, 0)$ црно, тада треба офарбати само сва пребројана поља (њих m). Решење је, дакле, мањи од бројева $R \cdot C - m$ и m.

Пребројавање можемо вршити директно приликом учитавања карактера и нема потребе да се подаци о распореду поља памте (нпр. у матрици).

```
(r, k) = map(int, input().split())
m = 0
for i in range(r):
    str = input()
    for j in range(k):
        if str[j] == 'B' and (i + j) % 2 == 0:
            m += 1
        if str[j] == 'C' and(i + j) % 2 != 0:
            m += 1
print(min(r * k - m, m))
```

Задатак: Серије 123

За дато n исписати чланове низа $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, n, \ldots, n$ (низ садржи једну јединицу, две двојке, три тројке итд.).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број n ($1 \leq n \leq 30$).

Излаз: Чланове траженог низа исписати на стандардни излаз (иза сваког исписати један размак).

Пример

Улаз	*Излаз*
4	1 2 2 3 3 3 4 4 4 4

Задатак: Таблица множења

Напиши програм који исписује таблицу множења.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја m и n ($1 \leq m, n \leq 9$), сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати таблицу множења са m врста и n колона, како је приказано у примеру. Између колона штампати табулатор (карактер `Tab`).

Пример

Улаз	*Излаз*
5	1 * 1 = 1 1 * 2 = 2 1 * 3 = 3 1 * 4 = 4 1 * 5 = 5
5	2 * 1 = 2 2 * 2 = 4 2 * 3 = 6 2 * 4 = 8 2 * 5 = 10
	3 * 1 = 3 3 * 2 = 6 3 * 3 = 9 3 * 4 = 12 3 * 5 = 15
	4 * 1 = 4 4 * 2 = 8 4 * 3 = 12 4 * 4 = 16 4 * 5 = 20
	5 * 1 = 5 5 * 2 = 10 5 * 3 = 15 5 * 4 = 20 5 * 5 = 25

Задатак: Серије непарни парни

За дато n исписати елементе низа 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, … који се формира тако што се полазећи од броја 1 – приказује један непаран природни број, затим следећа два парна – 2, 4; па следећа 3 непарна – 5, 7, 9; следећа 4 парна – 10, 12, 14, 16, … итд. Последња серија садржи n елемената.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава природан број n у границама од 1 до 40.

Излаз: На стандардни излаз исписати елементе траженог низа, сваку подсерију у посебном реду, при чему се иза сваког броја исписује један размак.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	1
	2 4
	5 7 9
	10 12 14 16
	17 19 21 23 25

Глава 5

Детаљнији преглед основних типова података

5.1 Рад са целим бројевима

У овом поглављу ћемо детаљније изучити различите целобројне типове.

5.1.1 Модуларна аритметика

Извршавање аритметичких операција по модулу n подразумева да се након примене операције одреди остатак при дељењу са бројем n. Важе следеће релације:

$$\begin{aligned}(a+b) \bmod n &= (a \bmod n \ + \ b \bmod n) \bmod n \\ (a \cdot b) \bmod n &= (a \bmod n \ \cdot \ b \bmod n) \bmod n \\ (b-a) \bmod n &= (b \bmod n - a \bmod n + n) \bmod n\end{aligned}$$

Докажимо релацију о производу (она о збиру се доказује још једноставније). Подсетимо се да је $x \bmod y = r$ ако и само ако постоји q такав да је $x = q \cdot y + r$ и ако је $0 \leq r < y$. Претпоставимо da је $a = q_a \cdot n + r_a$ и $b = q_b \cdot n + r_b$ за $0 \leq r_a, r_b < n$. Тада важи да је $a \cdot b = (q_a \cdot n + r_a) \cdot (q_b \cdot n + r_b) = (q_a \cdot q_b \cdot n + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b)n + r_a \cdot r_b$. Ако важи да је $r_a \cdot r_b = q \cdot n + r$ за $0 \leq r < n$, тада је $a \cdot b = (q_a \cdot q_b \cdot n + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b + q)n + r$, па је $(a \cdot b) \bmod n = r$. Важи да је $(a \bmod n \ \cdot \ b \ mod \ n) \bmod n = (r_a \cdot r_b) \bmod n = r$, чиме је тврђење доказано.

Докажимо релацију о разлици. Додавање броја n служи да се избегне дељење негативних бројева. Подсетимо се да је $x \bmod y = r$ ако и само ако постоји q такав да је $x = q \cdot y + r$ и ако је $0 \leq r < y$. Нека је $a = q_a \cdot n + r_a$ и $b = q_b \cdot n + r_b$, за $0 \leq r_a, r_b < n$. Зато је $a \bmod n = r_a$ и $b \bmod n = r_b$. Нека је $r_b - r_a + n = q \cdot n + r$ за неко $0 \leq r < n$. Зато је $(a \bmod n - b \bmod n + n) \bmod n = (r_b - r_a + n) \bmod \ n = r$. Такође, важи и да је $b - a = (q_b - q_a) \cdot n + (r_b - r_a) = (q_b - q_a - 1) \cdot n + (r_b - r_a + n) = (q_b - q_a - 1 + q) \cdot n + r$, па је и $(b-a) \bmod n = r$, чиме је тврђење доказано.

У наставку ћемо приказати неколико задатака у којима се примењује модуларна аритметика.

Задатак: Операције по модулу

Напиши програм који одређује последње три цифре збира и последње три цифре производа четири унета цела броја.

Улаз: У сваком реду стандардног улаза уноси се по један цео број из интервала $[1..999]$.

Излаз: На стандардни излаз се исписују број одређен са последње три цифре збира и број одређен са последње три цифре производа унетих бројева (евентуалне водеће нуле се не морају исписати).

Пример

Улаз	*Излаз*
999	996
999	1
999	
999	

Решење

У Пајтону практично не постоји проблем прекорачења када се за целе бројеве користи уграђени тип `int`. Зато је за решење овог задатка довољно израчунати збир и производ унетих бројева на уобичајени начин, а затим одредити последње три цифре израчунавањем остатка при целобројном дељењу са 1000.

```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())
d = int(input())

print((a + b + c + d) % 1000)
print((a * b * c * d) % 1000)
```

Када би се користио означени или неозначени целобројни тип који заузима 4 бајта (на пример неки од типова `numpy.int32`, `numpy.uint32` из библиотеке `numpy`), постојала би могућност прекорачења и претходни једноставан поступак би могао да да погрешан резултат (са овим типовима то се додуше дешава уз исписано упозорење). Библиотека `numpy` се обично користи за интензивна рачунања са великим количинама података, да би та рачунања била ефикаснија. У оваквим задацима немамо разлога да користимо ову библиотеку, али ћемо то учинити само ради илустрације проблема који може да наступи.

```
import numpy as np
a = np.int32(input())
b = np.int32(input())
c = np.int32(input())
d = np.int32(input())

print((a + b + c + d) % 1000)
print((a * b * c * d) % 1000)
```

Тачан резултат може да се добије чак и употребом типа `numpy.int32`, али је за израчунавање последње три цифре производа потребно применити мало напреднији алгоритам који користи чињеницу да су за последње три цифре производа релевантне само последње три цифре сваког од чинилаца. Зато је пре множења могуће одредити остатак при дељењу са 1000 сваког од чинилаца, израчунати производ, а онда одредити његове три последње цифре израчунавањем остатка његовог при дељењу са 1000. Аналогну тактику могуће је применити и на израчунавање збира.

Функције за множење и сабирање по модулу заснованећемо на релацијама $(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$ и $(a \cdot b) \bmod n = (a \bmod n \cdot b \bmod n) \bmod n$, а онда ћемо их примењивати тако што ћемо производ (тј. збир) по модулу n свих претходних бројева применом функција комбиновати са новим бројем. Дакле, ако функцију за сабирање по модулу n означимо са $+_n$, а за множење по модулу n са $\cdot_n$, израчунаваћемо $((a +_n b) +_n c) +_n d$ тј. $((a \cdot_n b) \cdot_n c) \cdot_n d$.

Нагласимо да је израчунавање целобројног количника и остатка временски захтевна операција (најчешће се извршава доста спорије него основне аритметичке операције), тако да је у пракси пожељно избећи је када је то могуће. На пример, ако сте потпуно сигурни да ће $a + b$ бити могуће репрезентовати одабраним типом података, тада је уместо $(a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$ ипак боље користити $(a + b) \bmod n$.

```
import numpy as np

def plus_mod(a, b, n):
    return ((a % n) + (b % n)) % n

def puta_mod(a, b, n):
    return ((a % n) * (b % n)) % n;
```

```
a = np.int32(input())
b = np.int32(input())
c = np.int32(input())
d = np.int32(input())

print(plus_mod(plus_mod(plus_mod(a, b, 1000), c, 1000), d, 1000))
print(puta_mod(puta_mod(puta_mod(a, b, 1000), c, 1000), d, 1000))
```

Уместо у једном изразу, збир и производ можемо рачунати итеративно тако што их иницијализујемо на нулу тј. јединицу, а затим у сваком кораку текући збир мењамо збиром по модулу текућег збира и текућег броја, а текући производ мењаамо производом по модулу текућег производа и текућег броја.

Задатак: Монопол

Монопол је игра у којој се играчи крећу по пољима која су постављена у круг. Играчи се увек крећу у смеру казаљке на сату. Претпоставимо да су поља означена редним бројевима који крећу од 0, да су на почетку игре оба играча на том пољу и да се током игре играчи нису кретали унатраг. Ако се зна број поља које је први играч прешао од почетка игре и број поља које је други играч прешао од почетка игре напиши програм који израчунава колико корака први играч треба да направи да би дошао на поље на ком се налази други играч.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе три природна броја. У првој линији дат је број поља на табли, у другој број поља које је од почетка игре прешао први, а у трећој број поља које је од почетка игре прешао други играч.

Излаз: На стандардни излаз треба исписати колико корака унапред играч треба да направи да би стигао на жељено поље.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
10	4
3	
7	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
10	6
7	
3	

Решење

Означимо укупан број поља са n, број поља које је први играч прешао са A и број поља које је други играч прешао са B. Означимо број поља на коме се први играч тренутно налази са a, а број поља на које треба да стигне са b. Током свог кретања он је прешао k_a пуних кругова ($k_a \geq 0$) у којима је прешао по n поља и након тога још a поља, тако да је $A = k_a \cdot n + a$. Дакле, пошто је $0 \leq a < n$, на основу дефиниције целобројног дељења важи да је $a = A \bmod n$. Слично је и $b = B \bmod n$.

Ако је $b \geq a$ тада се број корака може израчунати као $b - a$. Међутим, могуће је и да важи $b < a$ и у том случају играч мора прећи преко поља Start које је означено бројем 0. Број корака које играч треба да направи да би од поља на ком се налази стигао до поља Start је $n - a$, а број корака потребних да од поља Start стигне до жељеног поља је b, тако да је укупан број корака једнак $n - a + b$. На основу ове дискусије једноставно је направити програм који анализом ова два случаја стиже до решења.

```
brojPolja = int(input())
presaoPrvi = int(input())
presaoDrugi = int(input())
saPolja = presaoPrvi % brojPolja
naPolje = presaoDrugi % brojPolja
if naPolje >= saPolja:
    print(naPolje - saPolja)
else:
    print(naPolje - saPolja + brojPolja)
```

Још једно гледиште које доводи до истог решења је могућност да се у случају да је $b < a$ промене ознаке на пољима иза старта. Тако би се поље Start уместо са 0 означило са n, следеће би се уместо са 1 означило са $1 + n$ итд., док би се поље b означило са $b + n$. Дакле, решење добијамо тако што умањилац увећавамо за n уколико је мањи од умањеника, и израчунавамо разлику.

```
brojPolja = int(input())
presaoPrvi = int(input())
```

```
presaoDrugi = int(input())
saPolja = presaoPrvi % brojPolja
naPolje = presaoDrugi % brojPolja
if naPolje < saPolja:
    naPolje = naPolje + brojPolja
print(naPolje - saPolja)
```

Посматрано још из једног угла у овом задатку се тражи да се одреди разлика бројева B и A по модулу n. То сугерише да је уместо анализе случајева решење могуће добити израчунавањем вредности израза $(b - a + n) \bmod n$ тј. $(B \bmod n - A \bmod n + n) \bmod n$. Заиста, ако је $b \geq a$, вредност израза $b - a + n$ биће већа или једнака n и њен остатак при дељењу са n биће једнак вредности $b - a$ (тражење остатка ће практично поништити првобитно додавање вредности n). Са друге стране, ако је $b < a$ тада ће $b - a$ бити негативан број, па ће се додавањем вредности n добити број из интервала између 0 и $n - 1$. Зато проналажење остатка неће на крају променити резултат и добиће се вредност $b - a + n$ за коју смо рекли да је тражена вредност у овом случају.

```
brojPolja = int(input())
presaoPrvi = int(input())
presaoDrugi = int(input())
saPolja = presaoPrvi % brojPolja
naPolje = presaoDrugi % brojPolja
print((naPolje - saPolja + brojPolja) % brojPolja)
```

Задатак: Сат

Претпоставимо да приликом исказивања времена за сате користимо само бројеве од 1 до 12. Тако за 17:45 кажемо 5:45, а за 0:32 кажемо да је 12:32. Ако је познат број сати и минута такав да је број сати у опсегу од 0 до 23, а минута од 0 до 59, исказати то време тако да је број сати у опсегу 1 до 12.

Улаз: Учитавају се два броја, сваки у посебној линији. У првој линији је број сати (између 0 и 23), а у другој линији је број минута (између 0 и 59).

Излаз: Исписује се једна линија у којој се приказује временски тренутак у формату h:m, где је број сати h између 1 и 12, а број минута између 0 и 59.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
0	12:32
32	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5	5:35
35	

Решење

У задатку је кључно одредити пресликавање сати, док се минути исписују непромењено. Пошто бројање треба да буде од 1 до 12, потребно је да реализујемо следеће пресликавање:

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h
12	1	2	…	11	12	1	2	3	…	10	11	$f(h)$

Један од начина да се то уради је да се употреби гранање и да се вредност 0 преслика у вредност 12, да се вредности између 1 и 12 пресликају саме у себе, а да се од вредности веће од 12 пресликају одузимањем броја 12 од њих.

```
h = int(input())
m = int(input())
if h == 0:
        h = 12
if h > 12:
        h = h - 12
print(h, ':', m, sep='')
```

Сати се периодично понављају на сваких 12 сати. Ако бисмо сате бројали од 0 до 11, тада би се одговарајуће пресликавање могло одредити једноставним проналажењем остатка при дељењу са 12.

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h
0	1	2	…	11	0	1	2	3	…	10	11	$h \bmod 12$

Приметимо да након израчунавања остатка при целобројном дељењу са 12 проблем праве једино вредности 0 и 12 које су се пресликале у 0 уместо у 12.

Тај случај је могуће посебно испитати и поправити резултат.

```
h = int(input())
m = int(input())
h = h % 12
if h == 0:
   h = 12
print(h, ":", m, sep='')
```

Ипак, циљ нам је да покажемо како је могуће решити овај задатак и без употребе гранања. Да бисмо добили вредност из интервала од 1 до 12, можемо на добијени остатак који је из интервала 0 до 11 додати 1. Међутим, да би пресликавање било коректно, потребно је ово увећање неутрализовати тако што ћемо пре одређивања остатка од полазног броја одузети 1. Дакле, број сати можемо одредити као $(h-1) \bmod 12 + 1$. На пример, ако од 12 одузмемо 1, одредимо остатак добијеног броја 11 при дељењу са 12 и на добијени број 11 додамо 1 добићемо исправну вредност 12. Слично, ако од 13 одузмемо 1, одредимо остатак добијеног броја 12 са 12 и на добијени број 0 додамо 1 добићемо исправан резултат 1. Дакле, решење се реализује кроз следећа пресликавања

0	1	2	…	11	12	13	14	15	…	22	23	h
-1	0	1	…	10	11	12	13	14	…	21	22	$h-1$
11	0	1	…	10	11	0	1	2	…	9	10	$(h-1) \bmod 12$
12	1	2	…	11	12	1	2	3	…	10	11	$(h-1) \bmod 12 + 1$

Једини број који може да прави проблем је 0 јер се почетним одузимањем броја 1 добија негативни број -1, а не желимо да се ослањамо на понашање остатка у случају негативног делиоца. То можемо поправити тако што на полазни број увек на почетку додамо 12 чиме обезбеђујемо да ће број увек бити позитиван, при чему се остатак при дељењу са 12 не мења. Дакле, тражено пресликавање је $(h + 12 - 1) \bmod 12 + 1$ или $(h+11) \bmod 12+1$. Нагласимо да се ова техника додавања вредности модула користи када год је је потребно одузети две вредности, по неком модулу. Наиме, подсетимо се да важи

$$(a - b) \bmod n = (a \bmod n - b \bmod n + n) \bmod n.$$

```
h = int(input())
m = int(input())
print((h + 11) % 12 + 1, ":", m, sep='')
```

Задатак: Збир бројева по модулу

Напиши програм који израчунава збир природних бројева од 1 до n по датом модулу m.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два цела броја, сваки у посебном реду:

- n ($10^2 \leq n \leq 2^{32} - 1$)
- m ($2 \leq m \leq 100$)

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља тражени збир по модулу.

Пример

Улаз	*Излаз*
100	50
100	

Објашњење

Збир свих бројева од 1 до 100 је 5050 и остатак при дељењу са 100 је 50.

Задатак: Разбрајалица

Деца стоје у кругу и одређују ко ће од њих да жмури тако што изговарају неку разбрајалицу (на пример, еци-пеци-пец). Ако децу обележимо бројевима од 0 до $n-1$, редом како стоје у кругу, ако је познат број речи (слогова) разбрајалице и ако је познат редни број детета од којег почиње разбрајање, напиши програм који приказује редни број детета које је одабрано да жмури (тј. на коме се разбрајање завршава).

Улаз: Уносе се три природна броја. Број слогова разбрајалице, број деце и редни број детета од којег почиње разбрајање. Претпоставићемо да је број деце мањи од 100, а да је број слогова мањи од 1000.

Излаз: Исписује се један природни број – редни број детета одабраног да жмури.

Пример

Улаз	*Излаз*
13 7 3	1

Објашњење

Претпоставимо да седморо деце у кругу користи разбрајалицу еци-пеци-пец, а да бројање креће од детета број 3, разбрајање ће тећи овако:

```
еци-пеци-пец-јасам-мали-зец-тиси-мала-препе-лица-еци-пеци-пец
3    4    5    6    0    1   2    3     4    5    6   0    1
```

Задатак: Жмурке

Дете броји у игри жмурке $5, 10, 15, \ldots, 100$, али пошто не зна бројеве веће од 100, после 100 оно креће да броји из почетка. Који је број рекао у n-том кораку?

Улаз: Са стандардног улаза учитава се један позитиван цео број n.

Излаз: На стандардни излаз исписује се број који дете изговара у n-том кораку.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
5	25	1234	70

Задатак: Трајање вожње кроз два дана

Познати су сат, минут и секунд почетка и краја вожње аутобусом (могуће је и да је вожња почела у једном, а завршила се у наредном дану, али се зна да је трајала мање од 24 сата). Написати програм који одређује колико сати, минута и секунди је трајала та вожња.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 бројева (сваки у засебном реду). Прво сат, минут и секунд почетка вожње, а затим сат, минут и секунд краја вожње.

Излаз: На стандрадни излаз се исписује један ред у коме су три броја (сат, минут и секунд) раздвојена запетом.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
23 59 59 0 0 1	0:0:2	0 0 1 23 59 59	23:59:58

Задатак: Навијање сата

Дочепо се мали брата очевога сата. Пошто је још мали, зна да гледа само сатну казаљку. Сат се може навијати тако што се једним дугметом сатна казаљка помера за један сат унапред (у смеру кретаља казаљке на сату) а другим дугметом се помера за један сат уназад (у супротном смеру кретања казаљке на сату). Ако се зна позиција a на којој се тренутно налази казаљка, позиција b на којој брата жели да се нађе, напиши програм који одређује да ли се сат може навити тако што брата притисне једно од два дугмета тачно k пута.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се бројеви $0 \leq a, b \leq 11$ и број $0 \leq k \leq 1000$.

Излаз: На стандардни излаз написати текст `napred` ако се сат може навити тако што се казаљка помера унапред, `nazad` ако се сат може навити тако што се казаљка помера уназад (ако је сат могуће навити на оба начина, исписати `napred`, а затим `nazad` у следећем реду) тј. `ne moze` ако се сат не може навити.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
1	napred
7	nazad
18	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
2	nazad
4	
10	

Пример 3

Улаз	*Излаз*
7	ne moze
9	
3	

Задатак: Време завршетка филма

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Аутобус

Ако је познато трајање путовања и време када аутобус треба да стигне на одредиште, напиши програм који израчунава када аутобус треба да пође са полазишта (полазак може бити у претходном дану у односу на долазак).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се четири цела броја:

- $trajanje_h$ ($0 \leq trajanje_h < 12$) и $trajanje_m$ ($0 \leq trajanje_m < 60$) - сати и минути трајања вожње
- $dolazak_h$ ($0 \leq dolazak_h < 24$) и $dolazak_m$ ($0 \leq dolazak_m < 60$) - сат и минут доласка

Излаз: На стандардни излаз исписати два цела броја раздвојена двотачком:

- $polazak_h$ ($0 \leq polazak_h < 24$) и $polazak_m$ ($0 \leq polazak_m < 60$) - сат и минут поласка

Пример 1

Улаз	*Излаз*
2	10:30
30	
13	
0	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
12	20:0
0	
8	
0	

Задатак: Точак среће

Точак среће окренемо за одређени угао, па га поново окренемо у истом смеру за неки други угао. Точак је такав да се у једном окрету не може окренути више од 20 пуних кругова. Написати програм којим се одређује најмањи угао за који треба точак још једном да окренемо у истом смеру да би се дошао у почетни положај.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се 6 бројева (сваки у засебном реду). Прво сат минут и секунд првог угла, а затим сат, минут и секунд другог угла за који се точак окрене.

Излаз: На стандрадни излаз се исписује један ред у коме су три броја (сат, минут и секунд) раздвојена празнином.

Пример

Улаз	*Излаз*
120	108 19 0
50	
20	
130	
50	
40	

5.2 Везе између целих и реалних бројева

5.2.1 Заокруживање реалних бројева

Три најчешће коришћена начина заокруживања реалног броја x су:

- $\lfloor x \rfloor$ – заокруживање наниже, тј. на највећи цео број који је мањи или једнак од x. У језику Пајтон ово заокруживање врши се функцијом `math.floor`.
- $\lceil x \rceil$ – заокруживање навише, тј. на најмањи цео број који је већи или једнак од x. У језику Пајтон ово заокруживање врши се функцијом `math.ceil`.
- заокруживање на цео број који је најближи броју x. У језику Пајтон ово заокруживање врши се функцијом `round`. У случају када је реални број тачно између два цела броја (нпр. `3.5`), различити програмски језици користе различита правила о заокруживању. У језику Пајтон користи се такозвано правлио парне цифре. Оно гласи да у случају када је реалан број налази тачно између два цела броја, заокруживање се врши тако да цифра јединица буде парна. Тако је на пример `round(4.5) == 4`, а `round(5.5) == 6`. Слично, `round(-4.5) == -4`, а `round(-5.5) == -6`.

Важе и следећа тврђења.

- Најмањи цео број строго већи од броја x једнак $\lfloor x \rfloor + 1$.
- Највећи цео број строго мањи од броја x једнак $\lceil x \rceil - 1$.

Докажимо прво тврђење и формално. Ако је $y = \lfloor x \rfloor$, тада је $y \leq x < y+1$. Зато је $y+1 = \lfloor x \rfloor + 1$ најмањи цео број који је строго већи од x (y, који је први број мањи од њега, није такав). Друго тврђење се доказује веома слично.

Заокруживање користимо да бисмо нашли целобројна решења неких неједначина. Ако су n и k позитивни бројеви, тада важе следећа тврђења.

- Највећи цео број x такав да је $x \cdot k \leq n$ једнак је $x = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- Најмањи цео број x такав да је $x \cdot k \geq n$ једнак је $x = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$.
- Најмањи цео број x такав да је $x \cdot k > n$ једнак је $x = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$
- Највећи цео број x такав да је $x \cdot k < n$ једнак је $x = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$.

Докажимо формално прво тврђење. По дефиницији важи да је $\lfloor a \rfloor = b$ акко је $b \leq a < b + 1$. Докажимо да је $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ највећи број цео такав да помножен бројем k даје вредност мању или једнаку од n. Ако је $x = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, тада важи да је $x \leq \frac{n}{k} < x + 1$. Зато је $x \cdot k \leq n < (x + 1) \cdot k$ и $x = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ је заиста највећи број такав да је $x \cdot k \leq n$.

Докажимо формално и друго тврђење. По дефиницији важи да је $\lceil a \rceil = b$ акко је $b - 1 < a \leq b$. Зато, ако је $x = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ тада је $x - 1 < \frac{n}{k} \leq x$. Зато је $(x - 1) \cdot k < n \leq x \cdot k$, па је $x = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ заиста најмањи цео број такав да важи $x \cdot k \geq n$.

И остала тврђења се доказују на сличан начин.

Касније ћемо показати да ако су n и k природни бројеви, тада се заокруживање њиховог количника може урадити и само помоћу целобројне аритметике (види задатке Поклони и Лифт).

Задатак: Пертла

Од канапа дате дужине исецају се пертле дате дужине. Одредити колико пертли је могуће изрезати и колико канапа на крају преостане.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се два позитивна реална броја. У првом реду дата је дужина канапа, а у другом дата је дужина пертле. Бројеви су такви да одређена количина канапа увек преостане.

Излаз: На стандардни излаз исписати цео број који представља број пертли које је могуће исећи и у следећем реду реалан број који представља дужину преосталог канапа.

Пример

Улаз	*Излаз*
`50.5`	`5`
`10`	`0.5`

Решење

Нека је дужина канапа k, а пертле p. Број пертли x је највећи број такав да је $x \cdot p \leq k$. То је број $x = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor$, где заграде $\lfloor \ldots \rfloor$ означавају заокруживање наниже тј. највећи цео број који није већи од датог броја. Дакле, број

пертли се одређује као цео део количника дужине канапа и пертле. Након тога се израчуна укупна дужина канапа потребна да се тај број пертли направи, а дужина преосталог канапа се израчунава тако што се та дужина одузме од укупне дужине канапа. На пример, ако је дужина канапа $50.5\,\mathrm{cm}$, а дужина пертле $10.0\,\mathrm{cm}$ тада се може направити $\left\lfloor \frac{50.5\,\mathrm{cm}}{10\,\mathrm{cm}} \right\rfloor = \lfloor 5.05 \rfloor = 5$ пертли, за то је потребно $5 \cdot 10.0\,\mathrm{cm} = 50.0\,\mathrm{cm}$ канапа. Зато преостаје $50.5\,\mathrm{cm} - 50.0\,\mathrm{cm} = 0.5\,\mathrm{cm}$. Дакле, број пертли се израчунава као $\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor$, а преостала дужина канапа као $k - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \cdot p$.

Најбољи начин да се одреди цео део количника $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ два реална броја a и b је да се изврши обично дељење те две реалне вредности, а онда да се употреби библиотечка функција за заокруживање реалног броја наниже. У језику Пајтон то је функција `math.floor`, којом се добија цео део датог реалног броја, али опет у облику реалног броја.

```
import math
duzina_kanapa = float(input())
duzina_pertle = float(input())
broj_pertli = math.floor(duzina_kanapa / duzina_pertle)
preostalo_kanapa = duzina_kanapa - (broj_pertli * duzina_pertle)
print(broj_pertli)
print(format(preostalo_kanapa, '.4f'))
```

Један начин да се одреди цео део количника $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ два реална броја a и b је да се изврши конверзија у целобројни тип тј. да се резултат додели целобројној променљивој.

```
import math

duzina_kanapa = float(input())
duzina_pertle = float(input())

broj_pertli = int(duzina_kanapa / duzina_pertle)
preostalo_kanapa = duzina_kanapa - (broj_pertli * duzina_pertle)

print(broj_pertli)
print(format(preostalo_kanapa, '.4f'))
```

У језику Пајтон се оператор `%` може директно применити да се добије остатак и при дељењу реалних бројева.

```
duzina_kanapa = float(input())
duzina_pertle = float(input())
broj_pertli = int(duzina_kanapa // duzina_pertle)
preostalo_kanapa = duzina_kanapa % duzina_pertle
print(broj_pertli)
print(format(preostalo_kanapa, '.4f'))
```

Задатак: Точак

Напиши програм који на основу пречника точка бицикла, брзине кретања бицикла и времена које се бицикл креће одређује колико пута се точак окренуо (рачунајући и окрет који још није потпуно завршен).

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају реални бројеви који представљају пречник точка бицикла у cm, брзину кретања бицикла у $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и време кретања бицикла у s. Подаци су такви да точак није довршио последњи окрет који је започео.

Излаз: На стандардни излаз се записује један цео број који представља број започетих окрета бицикла.

Пример

Улаз	*Излаз*

`60`
`5`
`5`
	`14`

Решење

У задатку ћемо користити реалну аритметику и све вредности ћемо представити реалним бројевима. Број окрета точка једнак је количнику пређеног пута бицикла и обима точка, при чему треба водити рачуна о коришћењу истих јединица мере (користићемо метре). Обим точка у метрима може се израчунати формулом $O = \frac{R}{100} \cdot \pi$, где је R пречник точка у центиметрима (начини како да у свом програму употребите константу π описани су у задатку Столњак). Пошто се ради о равномерном кретању, пређени пут s једнак је производу брзине и времена кретања (ово је описано у задатку Путовање). Број кругова k је најмањи број такав да важи $O \cdot k \geq s$. Тај број се може израчунати као $k = \lceil \frac{s}{O} \rceil$, где $\lceil a \rceil$ означава заокруживање навише, тј. најмањи цео број који је већи или једнак броју a. Дакле, пошто се рачунају и започети кругови, количник пређеног пута и обима точка је потребно заокружити навише. Пошто радимо са реалним бројевима, то је могуће урадити библиотечком функцијом заокруживања навиже. У језику Пајтон то је функција `math.ceil`, којом се добија вредност реалног броја заокруженог навише, али опет у облику реалног броја.

```
import math

precnik_tocka_u_cm = float(input())
brzina_bicikla_u_m_s = float(input())
vreme_u_s = float(input())

obim_tocka_u_m = (precnik_tocka_u_cm / 100.0) * math.pi
predjeni_put_u_m = brzina_bicikla_u_m_s * vreme_u_s
broj_zapocetih_krugova = math.ceil(predjeni_put_u_m / obim_tocka_u_m)

print(broj_zapocetih_krugova)
```

Задатак: Скалирање

Професор је обећао ученицима да ће број поена који су освојили на контролном задатку пропорционално увећати тако да Пера који је најбоље урадио и освојио 95 поена добије максимални број од 100 поена. Међутим, овом операцијом цели бројеви поена се претварају у реалне, могуће са пуно или чак бесконачно децимала. Зато је професор одлучио да увећани број поена заокружи са прецизношћу од пола поена. На пример, број 87.368 поена се заокружује на 87.5, 54.25 поена на 54.5, а 73.75 се заокружује на 74 поена. Приметимо да се када постоје две могућности заокружује увек навише (као у последња два примера). Написати програм који за унети број поена одређује његову вредност заокружену на овај начин.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се један цео број између 0 и 95 који представља број поена ученика пре скалирања.

Излаз: На стандардни излаз исписати један реалан број који представља број поена ученика након скалирања.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`95`	`100`	`84`	`88.5`	`0`	`0`

Решење

Ако је p број поена пре скалирања, а p' број поена након скалирања, p' се може израчунати из пропорције $p : p' = 95 : 100$ тј. $p' = p/95 \cdot 100$. Овај број је потребно заокружити на најближи број чија је једина децимала 0 или 5. Бројеви са таквим децималним записом су они који представљају цео број половина. Број половина у броју p' је $p' \cdot 2$ и то не мора бити цео број, али се може заокружити на најближи цео број. Када се добије цео број половина, тражена вредност броја се може добити дељењем тог броја половина са 2.

Ако допустимо коришћење реалних бројева заокруживање се може вршити библиотечком функцијом заокруживања реалног броја на њему најближи цео броју. У језику Пајтон то заокруживање се врши библиотечком функцијом `round`. При коришћењу функција за заокруживање реалних бројева, треба водити рачуна да због немогућности потпуно прецизног записа неких бројева може доћи до грешака.

```
poeni = int(input())
skalirani_nezaokruzeni = (poeni / 95.0) * 100.0;
skalirani_zaokruzeni = round(skalirani_nezaokruzeni * 2.0) / 2.0;
print(format(skalirani_zaokruzeni, '.1f'))
```

Један начин да се задатак реши је да се посматрају децимале броја p'. Њих је могуће одредити тако што се

одреди $p' - \lfloor p' \rfloor$ (слично као у задатку Динари и паре). Ако је вредност тог израза у интервалу $[0, 0.25)$ тј. ако је та вредност већа или једнака нули, а строго мања од 0.25, тада се вредност треба заокружити на $\lfloor p' \rfloor$, ако је у интервалу $[0.25, 0.75)$, тада се вредност треба заокружити на $\lfloor p' \rfloor + 0.5$, а ако је у интервалу $[0.75, 1)$ тада се вредност треба заокружити на $\lfloor p' \rfloor + 1$. Оваква класификација на основу припадности дисјунктним интервалима може се реализовати гранањем (обично угнежђеним, коришћењем конструкције `else-if` како је објашњено у задатку Агрегатно стање).

Задатак: Кружна мета

Дата је кружна мета од n концентричних кругова полупречника од a cm до $n \cdot a$ cm. За погодак у унутрашњост најмањег круга добија се n поена, а за погодак у унутрашњост сваког следећег прстена добија се по поен мање. Написати програм којим се одређује колико се добија поена за погодак у тачку $A(x, y)$ унутар мете.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налази се број кругова, цео број n ($1 \leq n \leq 20$), у другом ширина једног круга, реалан број a, у трећем реду x-координата тачке која је погођена, а у другом њена y-координата. Координате су реални бројеви, а тачка се сигурно налази унутар мете ($\sqrt{x^2 + y^2} < n \cdot a$) и при томе није ни на једној од кружних линија које представљају границу кружних поља.

Излаз: Једини ред стандардног излаза треба да садржи освојени број поена.

Пример

Улаз	*Излаз*
`10`	`5`
`1.0`	
`1.2`	
`5.3`	

Задатак: Успех ученика

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Види другачија решења овог задатка.

5.2.2 Проблеми тачности записа реалних бројева

Већина реалних бројева има бесконачно много децимала (познати пример је број `\pi`). Такве бројеве не можемо да запишемо потпуно тачно ни на папиру ни у рачунару (нити било где друго) јер би за то било потребно бесконачно много простора и времена. Због тога, када рачунамо са реалним бројевима, ми у пракси скоро увек рачунамо са приближним вредностима мање или веће тачности.

Као што знамо, савремени рачунари су у стању да веома брзо изводе рачунске операције са реалним бројевима (оним који се могу записати у рачунару). Да би те операције биле тако брзе, реални бројеви се у рачунару памте на одређени стандардан начин који је условљен архитектуром рачунара и **не зависи од програмског језика** који користимо. Тај стандардан начин памћења реалних бројева подразумева да се користи простор одређене величине и у њему се памти неки коначан број значајних цифара броја. Значајне цифре броја су све његове цифре почевши од прве цифре која није нула. На пример, за број $0,0003400$ записан у декадном систему, значајне цифре су 3400 (у овом примеру чињеница да се прва значана цифра појављује на четвртој децимали била би засебно памћена). Нуле на крају броја су у овом случају значајне јер показују тачност приближне вредности коју користимо.

Приликом рачунања са приближним вредностима реалних бројева може доћи до губитка тачности. На пример, ако рачунамо користећи 3 значајне цифре, дељењем 1 са 3 добијамо резулатат $0,333$ као приближну вредност једне трећине. Множењем овог резултата са 3 добијамо $0,999$ уместо 1. Видимо да се појавила грешка величине $0,001$. Овај проблем се не може отклонити тако што рачунамо са већим бројем значајних цифара. Ако бисмо на пример рачунали са 100 значајних цифара, при истим операцијама бисмо добили грешку на стотој децимали. Према томе, грешке се појављују самим тим што нисмо у стању да операције са реалним бројевима изводимо потпуно тачно (било да користимо рачунар или не).

За памћење реалних бројева у рачунару се користи бинарни систем. Због тога чак и неки бројеви који у декадном систему имају врло кратак тачан запис, у рачунару не могу да буду тачно записани (јер тачан запис таквог броја у бинарном систему може да има бесконачно много цифара). На пример, иако бисмо очекивали да следећа наредба испише `da`, она ће исписати `ne` (проверите).

```
print('da' if 0.1 + 0.2 == 0.3 else 'ne')
```

Исписивањем вредности $0.1 + 0.2 - 0.3$ са 30 децимала добијамо $0.000000000000000055511151231258$. Овакав резултат се добија зато што се реални бројеви какве смо до сада користили у програмима (типа `float`), у рачунарима памте са 52 значајне цифре у бинарном систему, што је приближно 16 значајних цифара у декадном систему. При датом једноставном рачунању дошло је до грешке на позицији последње значајне цифре и тако добијамо ненулте цифре после 16 децимала једнаких нули.

Овим објашњењем смо само назначили проблем са којим се суочавамо и овде се нећемо бавити његовим детаљнијим проучавањем. Ипак, већ из наведеног се могу извући неки савети за практичан рад.

Претпоставимо да су подаци са којима рачунамо по вредости између `0` и `100` и да су дати са 5 децимала. То значи да имамо до 7 значајних цифара у тим подацима (2 значајне цифре пре децималне тачке и 5 после ње). Уколико после неког рачунања добијемо изразе `a` и `b`, који се разликују на шестој значајној цифри, сматраћемо да је та разлика стварна и да дати изрази и треба да буду различити. Међутим, ако је разлика тек на четрнаестој значајној цифри, треба закључити да су изрази `a` и `b` у ствари једнаки, а да је до разлике дошло услед ограничене тачности записа реалних бројева у рачунару. Одавде следи да изразе `a` и `b` не треба поредити простим испитивањем услова `a == b`, него испитивањем да ли се вредности `a` и `b` разликују довољно мало (занемарљиво мало), дакле испитивањем услова облика

```
abs(a - b) < eps
```

где је `eps` (скраћено од грчког слова ε тј. епсилон) мала позитивна константа, коју треба одредити на основу очекиваних величина и тачности података. Напоменимо да се вредност `0.1` може писати и као `1e-1`, вредност `0.01` као `1e-2`, вредност `0.001` као `1e-3` итд. У поменутом примеру за `eps` можемо да изаберемо на пример `0.000000001` или краће `1e-9` (уместо `9` би могао да стоји и неки други број већи од `7` а мањи од `16`).

Слично овоме, ако реалан број `x` (уз исте претпоставке о величини и тачности података и вредности `eps`) заокружујемо на мањи или једнак цео број, уместо `math.floor(x)` боље је писати `math.floor(x + eps)`.

Исто важи и за заокруживање броја `x` на већи или једнак цео број, где би уместо `x` требало писати `x - eps`.

Задатак: Динари и паре

Напиши програм који за дати реални број динара одређује одговарајући цео број динара и цео број пара.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси један реалан број, не већи од 1000, заокружен на две децимале, који представља износ новца.

Излаз: На стандардни излаз написати два цела броја, сваки у посебном реду, који представљају број динара и број пара.

Пример

Улаз	*Излаз*
`2.30`	`2` `30`

Решење

Број динара d се може добити тако што се унети износ k заокружи наниже ($d = \lfloor k \rfloor$). Број пара p може се добити тако што се од износа k одузме број динара и резултат помножи са 100 ($p = (k - \lfloor k \rfloor) \cdot 100$).

У језику Пајтон заокруживање реалног броја наниже врши се библиотечком функцијом `math.floor`. Међутим, ако се број динара и пара представи целобројним променљивама може доћи до неочекиваних резултата. Наиме приликом сваке доделе реалне вредности целобројној променљивој врши се њена конверзија заокруживањем наниже. Иако делује да вредност $(k - \lfloor k \rfloor) \cdot 100$ мора бити целобројна, јер број k по претпоставци има само две децимале, због непрецизности рада са бројевима у покретном зарезу могуће је да се деси да та вредност понекад буде мало мања него што је то очекивано (такав је случај управо са примером из поставке задатка, за износ $k = 2.30$ добија се $p = (k - \lfloor k \rfloor) \cdot 100 = 29.999999999999982$). У том случају ће се приликом доделе целобројној променљивој добити вредност која је за један мања него што треба да буде. Да се то не би догађало, довољно је пре доделе целобројној променљивој извршити заокруживање на најближу целу вредност. У језику Пајтон то се може урадити библиотечком функцијом `round`.

```
import math
```

```
iznos = float(input())
dinari = math.floor(iznos)
pare = round((iznos - math.floor(iznos)) * 100.0)
print(dinari)
print(pare)
```

Задатак: Лимунада

Одредити колико флаша дате запремине је могуће напунити датом количином лимунаде.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се два позитивна реална броја. У првом реду дата је запремина флаше у литрима као позитиван реалан број на до три децимале, а у другом је дата расположива количина лимунаде у литрима, такође на до три децимале. Запремина флаше није већа од 5 литара, а колична лимунаде није већа од 50 литара.

Излаз: На стандардни излаз исписати цео број који представља број флаша које је могуће напунити.

Пример

Улаз	*Излаз*
`0.2`	`3`
`0.6`	

Решење

Основна формула се добија као у задатку Пертла. Нека је запемина флаше F, а лимунаде L. Број флаша N је највећи цео број N такав да је $N \cdot F \leq L$. То је број $N = \lfloor \frac{L}{F} \rfloor$, где заграде $\lfloor \ldots \rfloor$ означавају заокруживање наниже тј. највећи цео број који није већи од датог броја. Дакле, број флаша се одређује као цео део количника количине лимунаде и запремине флаше.

Користећи изведену формулу директно, на примеру датом у поставци задатка добијамо резулатат `2` уместо `3`. То је зато што је резултат дељења `0.6 / 0.2` једнак `2.9999999999999996`, који кад се заокружи наниже даје `2`.

```
import math
v_flase = float(input())
v_limunade = float(input())
broj_flasa = math.floor(v_limunade / v_flase)
print(broj_flasa)
```

Овај проблем ћемо избећи ако количнику $\frac{L}{F}$ додамо мали позитиван број пре заокруживања. Остаје да видимо колики тај број треба да буде.

Најмања вредност количника $\frac{L}{F}$ коју уопште можемо добити је количник најмање количине лимунаде и највеће запремине флаше, дакле `0.001 / 5 = 0.0002`. То значи да се флаше пуне у корацима (“квантима”) од по најмање `0.0002` флаше. Према томе, додавањем броја eps довољно мањег од `0.0002` нашем количнику (на пример $eps = 0.000001 = 1e-6$), нећемо пребацити следећи цео број, то јест такво додавање неће покварити резултат када је он тачан. Са друге стране, ако је резултат требало да буде цео број, али је због ограничене тачности реалних бројева мањи од целог за рецимо `1e-14` (или мање), додавањем eps ћемо управо пребацити следећи цео број и тиме исправити грешку.

```
import math
v_flase = float(input())
v_limunade = float(input())
broj_flasa = math.floor(1e-6 + v_limunade / v_flase)
print(broj_flasa)
```

5.2.3 Заокруживање количника целобројним дељењем

Ако су n и k природни бројеви, тада се вредности $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ и $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ могу израчунати и само помоћу операција над целим бројевима. Тиме избегавамо употребу реалних бројева и све опасности до којих може доћи услед немогућности потпуно прецизног записа реалних бројева.

Доказаћемо да је број $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ једнак целобројном количнику бројева n и k који ћемо означавати са $n \operatorname{div} k$. Рачунањем целобројног количника избегавамо употребу реалног дељења и функција за рад са реалним бројевима. Нека је $n = q \cdot k + r$, тако да је $0 \leq r < k$. Тада је $q \cdot k + 0 \leq q \cdot k + r < q \cdot k + k$ тј. $q \cdot k \leq n < (q+1) \cdot k$,

тј. $q \leq \frac{n}{k} < q+1$. Зато је $q = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Међутим, на основу основне дефиниције целобројног количника, коју смо навели у задатку Разломак у мешовит број, важи да је $q = n \operatorname{div} k$.

Програмски језици по правилу дају могућност да се директно, целобројним дељењем, израчуна $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ (то је, како смо већ доказали, целобројни количник бројева n и k тј. број $n \operatorname{div} k$), али не и да се директно израчуна $\lceil \frac{n}{k} \rceil$. Постоји неколико начина да се то уради посредним путем.

Први начин се заснива на томе да је $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ једнако $\frac{n}{k}$ када је n дељиво са k (без остатка), а да је једнако $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ тј. $n \operatorname{div} k + 1$ када постоји остатак. На пример, ако је $n = 18$ и $k = 3$, тада је $\frac{n}{k} = 6$ и то је управо најмањи цео број већи или једнак (а уједно и мањи или једнак) вредности 6, тј. $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \frac{n}{k} = 6$. Ако је $n = 18$, а $k = 4$, тада је $\frac{n}{k} = 4.5$, па је $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = 4$, $\lceil \frac{n}{k} \rceil = 5$ и важи да је $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$.

Докажимо претходно тврђење и формално. Ако постоје q и r такви да је $n = q \cdot k + r$, где је $0 \leq r < k$, тада важи да је $q = n \operatorname{div} k$, $r = n \bmod k$ и $\frac{n}{k} = \frac{q \cdot k + r}{k} = q + \frac{r}{k}$. Пошто је $0 \leq \frac{r}{k} < 1$, важи да је $q \leq \frac{n}{k} < q + 1$. Зато је и $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = q$, тј. $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ заправо представља вредност целобројног количника n и k тј. вредност $n \operatorname{div} k$, што смо и раније доказали. Ако је $r = 0$, тада важи да је $\frac{n}{k} = q$ и q је најмањи број такав да већи или једнак од $\frac{n}{k}$, тј. $\lceil \frac{n}{k} \rceil = q = n \operatorname{div} k = \frac{n}{k}$. Ако је $r > 0$, тада је $\frac{r}{k} > 0$, ра је $q < \frac{n}{k}$. Зато је $q + 1$ најмањи број већи или једнак (у овом случају је већи) од $\frac{n}{k}$, тј. $\lceil \frac{n}{k} \rceil = q + 1 = n \operatorname{div} k + 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$.

Други начин је да се примети да важи да је

$\lceil \frac{n}{k} \rceil = \lfloor \frac{n+k-1}{k} \rfloor = (n + k - 1) \operatorname{div} k$.

Размотримо вредности $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ и $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ за $k = 4$ и разне вредности n.

n	…	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$	…	2	2	2	2	3	3	3	3	4	…
$\lceil \frac{n}{4} \rceil$	…	2	3	3	3	3	4	4	4	4	…

Приметимо да за вредности $n = 9$, $n = 10$, $n = 11$ и $n = 12$ важи да је $\lceil \frac{n}{4} \rceil = 3$. Са друге стране за вредности $n = 12$, $n = 13$, $n = 14$ и $n = 15$ важи да је $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = 3$. Додавањем вредности $k - 1 = 3$ на полазни број n тј. на бројеве 9, 10, 11 или 12 добијају се редом бројеви 12, 13, 14 и 15 и израчунавањем целобројног количника добија се вредност 3, што је и било потребно.

Да бисмо формално доказали да важи $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \lfloor \frac{n+k-1}{k} \rfloor$, опет претпоставимо да је $n = q \cdot k + r$, где је $0 \leq r < k$. Тада је $n + k - 1 = q \cdot k + r + k - 1$. Зато је $\frac{n+k-1}{k} = q + \frac{r+k-1}{k}$. Пошто је $0 \leq r < k$, важи и да је $0 \leq \frac{0+k-1}{k} \leq \frac{r+k-1}{k} < \frac{k+k-1}{k} < 2$, па је $q \leq \frac{n+k-1}{k} < q + 2$. Ако је $r = 0$, тада је $\frac{n+k-1}{k} = q + \frac{k-1}{k}$ и пошто је $\frac{k-1}{k} < 1$, тада је $q \leq \frac{n+k-1}{k} < q + 1$, па важи $\lfloor \frac{n+k-1}{k} \rfloor = q$, а већ раније смо показали да је у случају $r = 0$ важи да је $q = \frac{n}{k} = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. Ако је $r > 0$ тада је $\frac{r+k-1}{k} \geq 1$, па је $\frac{n+k-1}{k} \geq q + 1$. Пошто већ знамо да је $\frac{n+k-1}{k} < q + 2$, важи да је $\lfloor \frac{n+k-1}{k} \rfloor = q + 1$ за који смо већ показали да је у случају $r > 0$ једнак броју $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ тј. броју $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.

Задатак: Поклони

Сваки поклон садржи тачно k чоколадица. Ако на располагању имамо укупно n чоколадица, колико поклона је могуће запаковати?

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају два цела броја (сваки у посебном реду):

- k ($1 \leq k \leq 20$) - број чоколадица у једном поклону
- n ($0 \leq n \leq 1000$) - укупан број чоколадица

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - највећи број поклона које је могуће направити.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 19	4

Решење

Ако је број поклона x, број чоколадица у једном поклону k, а укупан број чоколадица n, тада треба пронаћи највеће x тако да важи да је $x \cdot k \leq n$. На пример, ако има $n = 29$ чоколадица и у сваки поклон стаје $k = 4$ чоколадица тада је могуће направити 7 поклона (тако се употреби $4 \cdot 7 = 28$ чоколадица). За 8 поклона потребно је $4 \cdot 8 = 32$ чоколадице, а толико немамо на располагању. У задатку Пертла доказали смо да је $x = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, где заграде $\lfloor \ldots \rfloor$ означавају заокруживање наниже тј. највећи цео број мањи од датог броја. Пошто су у задатку дати цели бројеви n и k најлакше и најбоље решење је израчунати њихов целобројни количник.

```
k = int(input())
n = int(input())
brojPoklona = n // k
print(brojPoklona)
```

Да су бројеви реални, могуће би било израчунати њихов реални количник и заокружити га наниже библиотечком функцијом `math.floor`.

```
import math

k = int(input())
n = int(input())
brojPoklona = math.floor(n/k);
print(brojPoklona)
```

Задатак: Лифт

У једном хотелу n људи чека испред лифта. У лифт може да стане њих k. Колико је најмање вожњи лифтом потребно да се сви попну у своје собе?

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се два цела броја, сваки у посебном реду:

- укупан број људи испред лифта n ($0 \leq n \leq 200$)
- број људи који могу да одједном стану у лифт k ($1 \leq k \leq 10$)

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - најмањи потребан број вожњи лифтом.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
18 3	6	18 4	5

Решење

Означимо број људи који се могу превести у једној вожњи са k, укупан број људи са n, а број вожњи са x. Потребно је пронаћи најмање x такво да важи $x \cdot k \geq n$. Пошто су n и k позитивни цели бројеви, потребно је пронаћи најмање x тако да је $x \geq \frac{n}{k}$. У задатку Точак доказали смо да је то вредност $x = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$, где заградама $\lceil \ldots \rceil$ означавамо заокруживање навише, на најмањи цео број већи или једнак датом броју.

Испитивање дељивости

Један начин да целобројни количник заокружимо навише је испитивање дељивости, које се може урадити на неколико начина. Може се употребити тернарни условни оператор.

```
n = int(input())
k = int(input())
brojVoznji = n // k if n % k == 0 else n // k + 1
print(brojVoznji)
```

Може се употребити наредба гранања `if` и ако је n дељиво са k накнадно увећати број вожњи добијен као $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ тј. $n \operatorname{div} k$.

```
n = int(input())
k = int(input())
brojVoznji = n // k
if n % k != 0:
    brojVoznji = brojVoznji + 1
print(brojVoznji)
```

Може се употребити и чињеница да се функцијом `int` логичка вредност `true` може конвертовати у целобројну вредност 1, а `false` у 0 и израз `(n // k) + int(n % k != 0)` (на целобројни количник додаје се 1 ако постоји остатак и 0 ако остатка нема) даје тражени резултат.

```
n = int(input())
k = int(input())
brojVoznji = (n // k) + int(n % k != 0)
print(brojVoznji)
```

Померање

До решења можемо доћи на основу везе $\lceil \frac{n}{k} \rceil = \lfloor \frac{n+k-1}{k} \rfloor$.

```
n = int(input())
k = int(input())
brojVoznji = (n + k - 1) // k
print(brojVoznji)
```

Коришћење заокруживања реалних бројева

Један начин да се количник заокружи навише је да се користи аритметика са реалним бројевима и библиотечка функција `math.ceil`, која врши заокруживање реалних бројева навише, уз све опасности које рад са реалним бројевима носи.

```
import math

n = int(input())
k = int(input())
brojVoznji = math.ceil(n / k)
print(brojVoznji)
```

Задатак: Оцена на испиту

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Аритметика

Једно могуће решење се заснива на посебној провери да ли је студент пао испит (добио оцену 5) и затим на коришћењу аритметике да би се одредила оцена ако је положио. Најмањи број поена потребан за оцену 6 је 51, за оцену 7 је 61 итд. Дакле, најмањи број поена потребан да би се добила оцена o је $10 \cdot (o-1) + 1$. Ако је познат број поена p, одговарајућа оцена је највећа оцена o таква да је $10 \cdot (o-1) + 1 \leq p$ тј. да је $10 \cdot (o-1) \leq p - 1$. На основу задатка Поклони знамо да је највећи број x такав да је $10 \cdot x \leq p - 1$ број $\lfloor \frac{p-1}{10} \rfloor$, па је зато $o = \lfloor \frac{p-1}{10} \rfloor + 1$. Заиста, целобројним дељењем бројем 10, интервал $[50, 59]$ се пресликава у број 5, интервал $[60, 69]$ у број 6 и слично. Зато, ако се од од бројева из интервала $[51, 60]$ одузме 1, одреди целобројни количник са 10 и на резултат дода 1, добија се тражена оцена 6. Слично важи и за све наредне интервале, тако да се оцена може израчунати тако што се од броја поена одузме 1, израчуна целобројни количник са 10 и на то дода 1.

```
# poeni osvojeni na ispitu
poeni = int(input())
# ocena na ispitu
ocena = (poeni - 1) // 10 + 1 if poeni >= 50 else 5
# prikaz rezultata
print(ocena)
```

Задатак: Крушке

Учитељица је купила k крушака, које жели да подели ученицима из свог одељења. Ако у одељењу има u ученика, колико још најмање крушака учитељица треба да купи да би била сигурна да ће сваком детету моћи да да исти број крушака.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се два природна броја (сваки у посебном реду):

- k ($0 \leq k \leq 300$) број крушака које учитељица тренутно има.
- u број ученика у одељењу ($15 \leq u \leq 30$).

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља најмањи број крушака које учитељица треба да купи.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
73	19
23	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
100	0
20	

Решење

Гранање

Учитељица деци може да подели све крушке које има тако да сви добију исто. Након поделе остаће јој $k \bmod u$ крушака. Ако се испостави да јој није преостала ни једна крушка (тј. ако је k дељиво са u), тада не мора ништа да докупљује. Ако јој остане одређени број крушака, тада је потребно да докупи толико још крушака да има тачно u крушака да би сваком детету могла да да још једну крушку, тј. потребно је да докупи $u - k \bmod u$ крушака. На основу овога задатак се може једноставно решити коришћењем гранања.

```
krusaka = int(input())
ucenika = int(input())
if krusaka % ucenika == 0:
    nedostaje = 0;
else:
    nedostaje = ucenika - krusaka % ucenika
print(nedostaje)
```

Најмањи број већи или једнак k који је дељив бројем u

Приметимо да се у овом задатку суштински тражи да се одреди најмањи могући број већи или једнак од броја k који је дељив бројем u. То је број $u \cdot \lceil \frac{k}{u} \rceil$. Заиста, слично као у задатку Лифт може се приметити да ће након куповине свако дете добити $\lceil \frac{k}{u} \rceil$ крушака. Онда је потребно да након куповине учитељица има $u \cdot \lceil \frac{k}{u} \rceil$ крушака, а потребно је докупити $u \cdot \lceil \frac{k}{u} \rceil - k$ крушака, што се може директно израчунати коришћењем било ког начина за заокруживање количника навише који су приказани у задатку Лифт.

Овај израз је могуће упростити. Претпоставимо да се при дељењу броја n бројем k добија целобројни количник $q = k \operatorname{div} u$ и остатак $r = k \bmod u$ тј. да важи $k = q \cdot u + r$, за $0 \leq r < u$. Ако је $r = 0$, тада учитељица не мора ништа да купује (заиста, важи да је $u \cdot q = u \cdot \lceil \frac{k}{u} \rceil = u \cdot \frac{k}{u} = k$). Ако је $r \neq 0$, тада је следећи садржалац броја ученика једнак $u \cdot (q + 1)$. Потребан број крушака до њега је $u \cdot (q + 1) - k = u \cdot q + u - k = u - r$, тј. $u - k \bmod u$. Решење је у оба случаја једнако $(u - k \bmod u) \bmod u$.

```
krusaka = int(input())
ucenika = int(input())
krusaka_po_uceniku = (krusaka + ucenika - 1) // ucenika
ukupno_krusaka = krusaka_po_uceniku * ucenika
nedostaje = ukupno_krusaka - krusaka
print(nedostaje)
```

Задатак: Планинари

Планинари се пењу на врх планине чија је висина задата у метрима. Дању се могу попети према горе известан број метара, али током ноћи спавају, па се морају спустити за одређен број метара. Напишите програм који ће одредити колико дана треба планинарима да се попну до врха планине.

Улаз: У прва три реда стандардног улаза налазе се природни бројеви G, D, H ($1 \leq D < G \leq H \leq 10^9$) који редом означавају: - G - висину метара коју планинари прођу дању пењући се навише, - D - висину метара коју се планинари спусте ноћу, - H - висина планине.

Излаз: У први и једини ред стандардног излаза испишите број дана који ће проћи док планинари не стигну до врха.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 1 6	2

Решење

Решавање неједначине

Ако се планинари током дана попну за G метара, и ноћу спусте за D метара, онда се након једног дана и једне ноћи укупно попну за G-D метара. Пењање тече тако што се током X дана и ноћи они пењу и силазе, да би на крају, следећег дана достигли врх планине. Дакле, потребно је одредити најмањи цео број X такав да важи да је $X \cdot (G - D) + G \geq H$, тј. $X \cdot (G - D) \geq H - G$. На основу задатка Лифт важи да је $X = \left\lceil \frac{H-G}{G-D} \right\rceil$. На основу резултата који је доказан у том задатку важи да је

$$\left\lceil \frac{H-G}{G-D} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(H-G)+(G-D-1)}{G-D} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H-D-1}{G-D} \right\rfloor = (H - D - 1) \operatorname{div} (G - D).$$

Након што се израчуна X, коначан резултат је $X + 1$, јер планинари долазе на врх планине током $X + 1$ дана.

```
g = int(input())
d = int(input())
h = int(input())
brojDana = (h - d - 1) // (g - d) + 1
print(brojDana)
```

Линеарна претрага

Један интуитиван, али неефикасан начин да се реши задатак је да се примени алгоритам линеарне претраге и да се редом у петљи за сваки дан, рачунају висине на којима се планинари налазе све док планинари не достигну висину врха планине.

```
g = int(input())
d = int(input())
h = int(input())
# broj trenutnog dana
brojDana = 0
# visina na kojoj se planinari nalaze
visina = 0
while True:
    # naredni dan
    brojDana += 1
    # planinari se penju
    visina += g
    # proveravamo da li su dostigli vrh
    if visina >= h:
        break
    # planinari se spustaju
    visina -= d

print(brojDana)
```

Задатак: Сечење плочица

Правоугаону терасу димензија $d \times s$ центиметара квадратних треба поплочати коришћењем плочица квадратног облика странице p центиметара, које се постављају тако да су им странице паралелне страницама терасе. Написати програм којим се одређује колико се плочица мора сећи ради поплочавања, као и површину дела терасе који заузимају сечене плочице. Од сваке сечене плочице користи се један део, а други одбацује.

Улаз:

- p - страница плочице у cm ($10 \leq p \leq 50$)
- d - дужина просторије у cm ($200 \leq d \leq 10000$)
- s - ширина просторије у cm ($200 \leq s \leq 10000$)

Излаз: Број плочица које се морају сећи и површина коју покривају сечене плочице.

Пример

Улаз	*Излаз*
`20`	`29`
`310`	`5700`
`270`	

Решење

Нека је:

- p - дужина странице плочице у `cm`,
- d - дужина просторије у `cm`,
- s - ширина просторије у `cm`.

Тражени број плочица које се морају сећи добија као разлика минималног броја плочица које покривају правоугаону област: $\left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{s}{p} \right\rceil$ и максималног броја плочица које су садржане у правоугаоној области: $\left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{s}{p} \right\rfloor$. Заиста максимални број плочица који се без сечења може сложити по дужини терасе је највећи број n за који важи да је $n \cdot p \leq d$, а на основу задатка Поклони то је управо $\left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor$. Слично, минимални број плочица које се морају сложити по дужини терасе да би покриле целу дужину терасе (уз евентуални вишак) је најмањи број n такав да је $n \cdot p \geq d$, а на основу задатка Лифт то је управо $\left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil$. За ширину важе потпуно аналогни закључци.

Површина коју покривају сечене плочице добија се као разлика површине терасе: $d \cdot s$ и површине коју покривају плочице које нису сечене: $\left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor \cdot p \cdot \left\lfloor \frac{s}{p} \right\rfloor \cdot p$.

Заокруживање целобројног количника се може урадити на разне начине (на пример, коришћењем чињенице да је $\left\lfloor \frac{d}{p} \right\rfloor = d \operatorname{div} p$ и да је $\left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil = \left\lfloor \frac{d+p-1}{p} \right\rfloor = (d + p - 1) \operatorname{div} p$), како је детаљно објашњено у задацима Поклони и Лифт.

```
p = int(input())
d = int(input())
s = int(input())
dfloor = d // p
dceil = (d + p - 1) // p
sfloor = s // p
sceil = (s + p - 1) // p
# dceil*sceil - minimalni broj plocica koje pokrivaju oblast
# dfloor*sfloor - maksimalni broj plocica koje su sadrzane u oblasti
broj_secenih_plocica = (dceil * sceil) - (dfloor * sfloor)
povrsina_pokrivena_secenim_plocicama = (d*s) - (dfloor*p*sfloor*p)
print(broj_secenih_plocica)
print(povrsina_pokrivena_secenim_plocicama)
```

Заокруживање је могуће извршити и коришћењем реалне аритметике и библиотечких функција `math.floor` и `math.ceil`.

Задатак: Папир

Написати програм који израчунава масу одређеног броја одштампаних књига, да би издавачка кућа знала коју носивост камиона треба да наручи.

Улаз:

- Природан број $brojKnjiga$ ($1 \leq brojKnjiga \leq 1000$) број одштампаних примерака књиге.
  - Природан број $brojStranica$ ($30 \leq brojStranica \leq 500$), број страна једне књиге;
  - Природан број $duzinaStranice$ ($50 \leq duzinaStranice \leq 297$), дужина листа тј. стране задата у милиметрима;
  - Природан број $sirinaStranice$ ($50 \leq sirinaStranice \leq 210$), ширина листа тј. стране задата у милиметрима;

- Реалан број $masaPapira$ ($50 \leq masaPapira \leq 100$), маса папира у грамима по квадратном метру.
- Реалан број $masaKorica$ ($10 \leq masaKorica \leq 100$), маса корица једне књиге у грамима;

Излаз:

- Реалан број који представља укупну масу књига у килограмима, заокружен на 3 децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
850 193 260 200 80.0 25.0	364.242

Објашњење

Потребно је одштампати 850 примерака књиге која има 193 стране. Један лист папира има две стране, тако да се књига састоји од 97 листова (на последњем листу одштампана је само једна страна) и корица. Маса једног листа папира је 4.16 грама. Тежина једне књиге је зато једнака збиру масе листова која је једнака 403.52 грама и масе корица која је 25 грама, тј. једна књига је тешка 428.52 грама. Зато је укупна маса једнака 364.242 килограма.

Задатак: Кофа

У дечијем базену постоји гусарски брод на чијем се врху налази кофа која се празни на сваких k минута. Ако се зна број минута протеклих од неког ранијег пражњења кофе напиши програм који одређује број минута преосталих до првог следећег минута у коме ће се кофа сигурно испразнити (0 ако ће се кофа испразнити у тренутном минуту).

Улаз: У првом реду стандардног улаза налази се цео позитиван број k ($0 < k \leq 60$) који представља број минута између свака два узастопна пражњења кофе, а у другом број n ($0 \leq n \leq 240$) који представља број минута од неког претходног пражњења кофе.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
5 23	2

Пример 2

Улаз	*Излаз*
5 25	0

Задатак: Воћни пакети

Животиње у зоолошком врту воле да једу воће. У врт се допремају пакети воћа у којима се налази a килограма ананаса, b килограма банана и j килограма јабука. Волонтери треба да припреме дневни оброк за који знају да треба да садржи бар A килограма ананаса, B килограма банана и J килограма јабука. Напиши програм који израчунава који је најмањи број пакета воћа које волонтери треба да наруче да би могли да припреме дневни оброк.

Улаз: Са станардног улаза учитава се 6 целих бројева, сваки у посебном реду: a, b, j, из интервала $[1, 5]$ и A, B, J из интервала $[5, 100]$.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља број пакета које треба наручити.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 5 4 12 14 17	5

Задатак: Дељиви око броја

Дати су цели бројеви n и k. Напиши програм који одређује највећи цео број $l \leq n$ дељив бројем k и најмањи цео број $d \geq n$ дељив бројем k.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се два цела броја (сваки у посебном реду).

- n ($0 \leq n \leq 100000$)
- k ($1 \leq k \leq 10000$)

Излаз: На стандардни излаз исписати два тражена цела броја, сваки у посебном реду.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
23	20
5	25

Пример 2

Улаз	*Излаз*
49	49
7	49

Задатак: Број дељивих у интервалу

Напиши програм који одређује колико у интервалу $[a, b]$ постоји бројева дељивих бројем k.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се три цела броја, сваки у посебном реду.

- a ($0 \leq a \leq 10^9$)
- b ($a \leq b \leq 10^9$)
- k ($1 \leq k \leq 10^9$)

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени цео број.

Пример

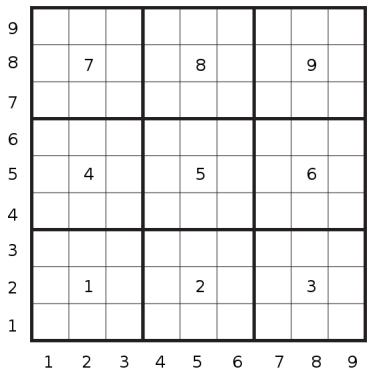
Улаз	*Излаз*
30 53 5	5

Објашњење

Бројеви су 30, 35, 40, 45 и 50.

Задатак: Судоку

Мирко је мали програмер који покушава да испрограмира игрицу судоку. Близу је да заврши, али му је потребна мала помоћ. Смислио је да корисник мишем бира квадрат у који ће уписати број. Поље се састоји од 81 квадратића распоређеног у 9 врста и 9 колона и организованог у 9 већих квадрата (као на слици). Сваки квадратић је димензије 30 пута 30 пиксела (укупно поље је димензије 270 пута 270 пиксела). Познат је положај пиксела на који је кликнуто мишем. Положај је одређен редним бројевима (координатама) тог пиксела по хоризонтали и по вертикали, рачунајући од доњег левог угла поља (пиксели се и по хоризонтали и по вертикали броје од 1 до 270). Потребно је исписати редни број врсте, колоне и већег квадрата у којем се налази пиксел на који је кликнуто (врсте се броје од 1 до 9 одоздо навише, колоне од 1 до 9 слева надесно, а квадрати по врстама од доњег левог угла, како је обележено на слици).



Слика 5.1: Судоку

Улаз: Са улаза се учитавају два цела броја x и y ($1 \leq x, y \leq 270$) које представљају координате пиксела на који је кликнуто.

Излаз: На стандардни излаз исписати три броја, сваки посебном реду: редни број врсте (од 1 до 9), редни број колоне (од 1 до 9) и редни број квадрата (од 1 до 9).

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`128`	`8`	`180`	`6`	`181`	`7`
`230`	`5`	`180`	`6`	`181`	`7`
	`8`		`5`		`9`

Задатак: Магацин сокова

У магацин се на n полица слажу гајбице са соковима. У сваку гајбицу може да стане k флаша сокова. Одредити најмањи укупан број гајбица потребан да се спакују све флаше из магацина, ако је познат број флаша сокова на свакој полици, при чему се у сваку гајбицу могу паковати искључиво флаше са једне полице.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($1 \leq n \leq 100$) који представља број полица у магацину. У другој је природан број k ($5 \leq k \leq 30$) који представља капацитет гајбице. У свакој од наредних n линија налази се природан број, из интервала $[5, 500]$, који представља број флаша на свакој полици.

Излаз: У једној линији стандардног излаза исписује се најмањи број употребљених гајбица.

Пример

Улаз	*Излаз*
`3`	`10`
`8`	
`31`	
`25`	
`16`	

Објашњење

За флаше са прве полице потребно је 4 гајбице, са друге исто 4, а са треће 2.

Види другачија решења овог задатка.

5.3 Карактерски тип података

У језику Пајтон не постоји посебна подршка за представљање појединачног карактера. Уместо тога, користи се општији тип података, који се зове ниска (енгл. string), а који може да садржи текст било које дужине. О нискама ће бити више речи касније, а на овом месту истичемо да се за појединачне карактере користе ниске које садрже само 1 карактер. За кодирање ниски се користи UNICODE стандард, тако да се у нискама на

Пајтону може појавити сваки UNICODE карактер. Број бајтова које заузима један карактер у Пајтону није исти за сваки карактер.

У пајтону се појединачни карактер учитава као и било која друга ниска, помоћу функције input().

Често је потребно за учитани карактер утврдити којој класи припада (цифра, мало или велико слово, знак интерпункције, белина и слично). Ово је могуће утврдити коришћењем уграђених метода за рад са нискама. На пример, за ниску s на располагању су нам следеће методе:

- `s.isdigit` – проверава да ли су сви карактери ниске s цифре
- `s.islower` – проверава да ли су сва слова у ниски s мала слова
- `s.isupper` – проверава да ли су сва слова у ниски s велика слова

Све ове методе враћају вредност логичког типа (`True` или `False`).

Поред наведених метода, ниске располажу и методама које конвертују (претварају) мала у велика слова и обратно. Прецизније, за дату ниску `s` постоје ове методе:

- `s.upper()` – враћа ниску која се од ниске `s` добија када се сва мала слова замене одговарајућим великим, а остали карактери се препишу. При томе се сама ниска `s` не мења.
- `s.lower()` – враћа ниску која се од ниске `s` добија када се сва велика слова замене одговарајућим малим, а остали карактери се препишу. При томе се сама ниска `s` не мења.

Карактери у језику Пајтон се интерно представљају својим UNICODE кодовима, тачније UNICODE кодним тачкама(енгл. UNICODE code points), које су цели бројеви. Функција `ord` за дати карактер враћа његову кодну тачку, док функција `chr` за дату кодну тачку враћа одговарајући карактер. Релацијски оператори (`<=`, `>=`, `<`, `>`, `==` и `!=`). се могу користити за поређење карактера у Пајтону, при чему се заправо поређење врши између UNICODE кодних тачака тих карактера.

Додатне могућности за слова енглеске абецеде

Захваљујући чињеници да UNICODE кодне тачке малих слова енглеске абецеде редом представљају узастопне целобројне вредности, проверу да ли је дати карактер `c` мало слово енглеске абецеде можемо (осим помоћу функције `c.islower()`, која може да се користи и за друге језике) да извршимо на још један начин, а то је да проверимо да ли је кôд карактера `c` између кодова карактера `'a'` и `'z'` тј. да ли припада интервалу од `'a'` до `'z'` (`'a' <= c && c <= 'z'`).

Слично претходном, кодне тачке великих слова енглеске абецеде редом такође представљају узастопне целобројне вредности, па проверу да ли је карактер `c` велико слово енглеске абецеде можемо обавити условом `'A' <= c && c <= 'Z'`. Исто важи и за декадне цифре, па услов `'0' <= c && c <= '9'` даје одговор на питање да ли је карактер `c` цифра.

Мало слово енглеске абецеде се може трансформисати у велико слово и тако што се прво одреди које је то по реду слово у абецеди (најбоље је да бројање креће од нуле), тако што се од кôда тог карактера одузме кôд карактера `'a'`. Након тога, на кôд карактера `'A'` се дода израчунати редни број датог слова, и на крају се добијени резултат поново претвара у текст. Дакле, ако променљива `c` садржи мало слово, његову трансформацију у велико слово можемо извршити изразом `chr(ord('A') + ord(c) - ord('a'))`. Трансформација великих у мала слова вршила би се аналогно, изразом `chr(ord('a') + ord(c) - ord('A'))`.

Задатак: Класификација карактера

Написати програм који за учитани ASCII карактер испитује да ли је мало слово, велико слово, цифра или нешто четврто

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се један карактер.

Излаз: У једној линији стандарног излаза приказати једну од следћих информација: `MALO SLOVO`, `VELIKO SLOVO`, `CIFRA`, `OSTALO`.

Пример 1		**Пример 2**		**Пример 3**		**Пример 4**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`a`	`MALO SLOVO`	`B`	`VELIKO SLOVO`	`7`	`CIFRA`	`:`	`OSTALO`

Решење

Прво питање је како учитати појединачни карактер. У језику Пајтон то се може урадити помоћу наредбе `c = input()`, претпостављајући да корисник уноси само један карактер и затим притиска `Enter`, јер функција

`input()` учитава целу линију текста. Ако корисник може да унесе више карактера пре притиска на `Enter`, можемо да пишемо `c = input()[0]` (тиме издвајамо први карактер учитане линије текста, пошто нам у овом задатку остали карактери нису битни).

Испитивање да ли карактер припада некој од наведених класа најбоље је вршити коришћењем библиотечких функција. У програмском језику Пајтон можемо користити следеће методе које се примењују на нискама:

- `isdigit` (проверава да ли је задата ниска састављена само од цифара),
- `islower` (проверава да ли је задата ниска састављена само од малих слова),
- `isupper` (проверава да ли је задата ниска састављена само од великих слова).

Резултат ових функција је логичког типа (`True` или `False`).

Пошто су сви услови међусобно искључиви, проверу услова можемо вршити угнежђеним наредбама гранања тј. конструкцијом `else-if` коју смо дискутовали у задатку Агрегатно стање. На пример, прво проверавамо да ли је карактер мало слово, ако није, онда проверавамо да ли је велико слово, ако није, онда проверавамо да ли је цифра, и на крају, ако није, онда пријављујемо да припада класи осталих карактера.

```
c = input()
if c.islower():
    print(”MALO SLOVO”)
elif c.isupper():
    print(”VELIKO SLOVO”)
elif c.isdigit():
    print(”CIFRA”)
else:
    print(”OSTALO”)
```

Уместо коришћења библиотечких функција могуће је имплементирати решење које се ослања на чињеницу да се карактери интерно репрезентују својим UNICODE кодовима у језику Пајтон (који представљају проширење скупа ASCII кодова), па се карактери могу поредити стандардним релацијским операторима (‘<=’, ‘>=’, ‘<’, ‘>’, ‘==’ и ‘!=’). Поређење карактера је заправо поређење њихових Unicode кодних тачака. Даље, UNICODE кодне тачке карактера имају особину да су сва мала слова и сва велика слова ASCII скупа (енглеска абецеда) поређана једно иза другог по абецедном редоследу, док су цифре поређане једна иза друге по нумеричкој вредности. То омогућава да се провера да ли је карактер мало слово изврши тако што се провери да ли је његов кôд између кодова карактера `'a'` и `'z'` тј. да ли припада интервалу од `'a'` до `'z'` (ако је учитани карактер `c` провера се врши условом `'a' <= c and c <= 'z'`). Слично важи и за велика слова и за цифре.

Нагласимо још да се у језику Пајтон може користити краћи запис `'a' <= c <= 'z'`, али пошто у другим језицима (нпр. у C-у и C++-у) он може довести до грешака, није препоручљиво користити га.

Библиотечке функције ове провере могу извршити на ефикаснији начин (уместо поређења релацијским операторима, оне често примењују операције над бинарним записом ASCII кодова и могу да класификују карактере само на основу стања неколико битова) тако да се препоручује њихово коришћење, чиме се добија поузданији и преносивији кôд.

```
c = input()
if 'a' <= c and c <= 'z':
    print(”MALO SLOVO”)
elif 'A' <= c and c <= 'Z':
    print(”VELIKO SLOVO”)
elif '0' <= c and c <= '9':
    print(”CIFRA”)
else:
    print(”OSTALO”)
```

Задатак: Трансформација карактера

Написати програм којим се трансформише учитани каракатер тако што се мало слово пребацује у велико, велико слово у мало, а остали карактери се не мењају.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се један карактер.

Излаз: На стандардном излазу приказати трансформисан карактер.

Пример

Улаз	*Излаз*
`t`	`T`

Решење

Први корак у решењу задатка је класификација карактера (провера да ли је у питању мало слово, велико слово или нешто треће) и она се ради на потпуно исти начин као у задатку Класификација карактера, најбоље коришћењем библиотечких функција. У језику Пајтон се могу користити metode `islower` и `isupper`. Када се утврди да је карактер мало слово или да је велико слово треба га трансформисати.

Најбољи начин да се изврши трансформација је употреба библиотечких функција. У програмском језику Пајтон можемо користити методе `upper` и `lower`, које се могу позвати за произвољну ниску (па и ону која представља један карактер). Обе функције враћају карактер. Ако је карактер који се трансформише функцијом `lower` велико слово, функција враћа одговарајуће мало слово, док у супротном враћа исти карактер који јој је прослеђен. Потпуно аналогно функција `upper` мала слова трансформише у велика, док остале карактере не мења.

```
ch = input()[0]
if ch.islower():
    ch = ch.upper()
elif ch.isupper():
    ch = ch.lower()
print(ch)
```

И у овом задатку бисмо могли имплементирати решење које не користи библиотечке функције (мада је оно мало теже и лошије). Ако знамо да се за представљање слова енглеске абецеде у језику Пајтон користе UNICODE кодови чији је распоред направљен тако да су им вредности узастопни цели бројеви сортирани по абецеди, трансформација малог у велико слово се може извршити тако што се прво одреди које је то по реду слово у абецеди (најбоље је да бројање креће од нуле), тако што се од тог карактера тј. његовог кода одузме карактер `'a'` тј. његов кôд, а затим се нађе велико слово које има тај редни број у абецедном реду свих великих слова, тако што се на карактер `'A'` тј. његов кôд дода редни број карактера. При томе користимо функцију `chr`, која за дату Unicode кодну тачку враћа одговарајући карактер, и функцију `ord` која за дати карактер враћа одговарајућу Unicode кодну тачку.

Резимирајмо: ако променљива `c` садржи мало слово, његову трансформацију у велико слово можемо извршити изразом `chr(ord('A') + (ord(c) - ord('a')))` тј. `chr(ord(c) - ord('a') + ord('A'))`. На пример, ако променљива `c` чува карактер `'d'` тада је вредност `ord(c) - ord('a')` једнака 4 (јер се од кода карактера `'d'` који је једнак 101 одузима кôд карактера `'a'` који је једнак 97), док је вредност израза `chr(ord('A') + (ord(c) - ord('a')))` једнака `'D'` (јер се на кôд карактера `'A'` који је једнак 65 додаје вредност 4 и тако добија кôд 69 који је кôд карактера `'D'`). Наведене бројевне вредности кодова никада не треба наводити у програмима већ је уместо тога увек боље користити функцију `ord` примењену на карактерске (словне) константе, што је равноправно употреби бројевних кодова, а чини програм разумљивијим. Трансформација великих у мала слова вршила би се аналогно, изразом `chr(ord(c) - ord('A') + ord('a'))`.

```
ch = input()[0]
if ord(ch) >= ord('a') and ord(ch) <= ord('z'):
    ch = chr(ord(ch) - ord('a') + ord('A'))
elif ord(ch) >= ord('A') and ord(ch) <= ord('Z'):
    ch = chr(ord(ch) - ord('A') + ord('a'))
print(ch)
```

Задатак: Абецедно огледало

Катарина је одлучила да својој другарици пошаље шифровану поруку, која садржи само слова енглеске абецеде, цифре и интерпункцијске знаке. Свако слово ће шифровати посебно на основу наредних правила. Мала слова се шифрују великим словима тако што се слово `a` шифрује словом `Z`, слово `b` шифрује словом `Y`, `c` словом `X` итд., све до слова `y` које се шифрује словом `B` и `z` које се шифрује словом `A`. Велика слова се шифрују потпуно аналогно - од `A` које се шифрује са `z` до `Z` које се шифрује са `a`. Остали карактери се не мењају.

Улаз: Са стандардног улаза уноси се једна линија текста, завршена карактером тачка (карактером `.`).

Излаз: На стандардни излаз исписати шифровани текст (без карактера тачка).

Пример

Улаз	*Излаз*
`Zdravo svima.`	`aWIZEL HERNZ`

Решење

Први задатак је да читамо карактере један по један, док не дођемо до карактера `'.'`. Једна могућност би била да учитамо одједном целу линију и да након тога обрађујемо један по један њен карактер, слично као у задатку Цезаров кôд. У језику Пајтон се то може урадити помоћу функције `input` и петље која пролази кроз све карактере ниске.

У телу петље потребно је шифровати сваки карактер. Прво вршимо класификацију на мала слова, велика слова и остале карактере, на начин који је приказан у задатку Класификација карактера. Ако је карактер класификован као мало слово, вршимо његово шифровање и то тако што приметимо да ће растојање између кода карактера који се шифрује од кода карактера `'a'` бити једнако растојању између карактера `'Z'` и резултата. На пример, ако је у питању карактер `'c'` његово растојање од карактера `'a'` је два, па је резултат карактер чији се кôд добија када се број два одузме од кода карактера `'Z'` тј. добија се карактер `'X'`. Дакле, ако је `c` мало слово, његова шифра је `chr(ord('Z') - (ord(c) - ord('a'))`, а ако је `c` велико слово, његова шифра је `ord('z') - (ord(c) - ord('A'))`.

```
for c in input():
  if c == '.':
    break

  if c.islower():
      tc = chr(ord('Z') - (ord(c) - ord('a')))
  elif c.isupper():
      tc = chr(ord('z') - (ord(c) - ord('A')))
  else:
      tc = c
  print(tc, end='')
```

5.4 Структурни тип

Када желимо да неколико података третирамо као целину, након дефинисања неколико појединачних променљивих, податке можемо да групишемо у торку и доделимо једној променљивој.

На пример, опис једног такмичара чине подаци о његовом имену, разреду, школи из које долази и броју освојених поена.

```
ime = ...
razred = ...
skola = ...
br_poena = ...

ucenik = (ime, razred, skola, br_poena)
```

Пошто су торке део самог језика Пајтон, овај начин је најпознатији и често је коришћен.

Нешто удобније за упортебу су именоване торке (енгл. named tuples), које су дефинисане у модулу collections. Такође, за груписање података могу да се користе и класе. Због једноставности, у овој збирци ћемо користити само (обичне) торке и њихово паковање и распакивање у појединачне податке.

Задатак: Разломци

Напиши програм који сабира и множи разломке.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе два разломка, сваки у посебном реду. Сваки разломак је записан тако што је су записани његов бројилац и именилац, раздвојени карактером `/`.

Излаз: На стандардни излаз исписати у првом реду збир, а у другом производ разломака. Разломци се исписују у истом формату у ком су учитани, максимално скраћени (бројилац и именилац су узајамно прости).

Пример

Улаз	*Излаз*
2/3	11/12
1/4	1/6

Решење

Разломак можемо представити торком која чува бројилац и именилац.

Дефинишемо функцију која скраћује дати разломак. Ова функција прима разломак у облику торке као параметар, а враћа скраћени разломак, такође као торку. Разломак скраћујемо тако што одредимо НЗД бројиоца и имениоца применом Еуклидовог алгоритма, а затим бројилац и именилац поделимо тим бројем.

Разломке $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ сабирамо тако што прво формирамо разломак $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$ и затим га скратимо. Исте разломке множимо тако што прво формирамо разломак $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ и затим га скратимо.

```
def NZD(a, b):
    while b != 0:
        tmp = a % b
        a = b
        b = tmp
    return a

def Skrati(r):
    (brojilac, imenilac) = r
    nzd = NZD(brojilac, imenilac)
    brojilac //= nzd
    imenilac //= nzd
    return  (brojilac, imenilac)

def Saberi(a, b):
    (a_brojilac, a_imenilac) = a
    (b_brojilac, b_imenilac) = b
    brojilac = a_brojilac*b_imenilac + a_imenilac*b_brojilac
    imenilac = a_imenilac*b_imenilac;
    return Skrati((brojilac, imenilac))

def Mnozi(a, b):
    (a_brojilac, a_imenilac) = a
    (b_brojilac, b_imenilac) = b
    brojilac = a_brojilac * b_brojilac
    imenilac = a_imenilac * b_imenilac;
    return Skrati((brojilac, imenilac))

def Ucitaj():
    (brojilac, imenilac) = map(int, input().split("/"))
    return (brojilac, imenilac)

def Ispisi(razlomak):
    (brojilac, imenilac) = razlomak
    print(brojilac, "/", imenilac, sep="")

a = Ucitaj()
b = Ucitaj()
Ispisi(Saberi(a, b))
Ispisi(Mnozi(a, b))
```

Задатак: Бољи у две дисциплине

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Могуће је дефинисати структуру (или класу) за дефинисање поена једног такмичара и на тој структури дефинисати метод којим се врши лексикографско поређење.

Глава 6

Низови, ниске, матрице

У многим задацима потребно истовремено у меморији запамтити целу серију података, да би се затим на тим подацима могле вршити различите обраде. За то се користе *листе* (каже се и *низови*).

6.1 Једнодимензионалне колекције података

6.1.1 Елементи програмског језика

Тип који се у језику Пајтон најчешће користи за смештање серије података је листа. Елементи листе могу бити различитих типова, мада су у практичним применама много чешће сви истог типа. Дужина листе може да се мења током рада програма. Један чест начин рада са листама је следећи:

```
n = int(input())  # ucitavamo broj elemenata liste
a = []            # formiramo praznu listu
### ucitavamo jedan po jedan element liste
for i in range(n):
    a.append(float(input()))
...
```

Методом `append` примењеном на листу `a` додајемо елемент на крај листе. Елементи се могу додавати (убацивати) и на другим местима у листи, али такав начин проширивања листе је мање ефикасан.

У Пајтону постоји и краћи начин да се формира листа од `n` реалних бројева, који су дати сваки у посебном реду (корисник после сваког броја притиска `Enter`):

```
n = int(input())  # ucitavamo broj elemenata liste
a = [float(input()) for i in range(n)]
...
```

За добијање листе целих бројева само уместо `float` треба писати `int`. Након формирања листе на било који од два описана начина, она има `n` елемената и редни бројеви (индекси) тих елемената имају вредности од 0 до $n-1$.

У задацима не мора бити задато колико елемената има серија. Уместо тога, крај серије се може означити на пример нулом, која не припада серији. Формирање листе у том случају је веома слично:

```
### kreiramo praznu listu
a = []
while (true):
    # ucitavamo element i ako je ucitana nula prekidmo ucitavanje
    x = int(input())
    if x == 0: break
    # u suprotnom listu prosirujemo ucitanim elementom
    a.append(x)
```

Ако су сви елементи листе реалних бројева дати у једном реду раздвојени размацима, листа се може формирати и овако, без обзира на то колико је бројева задато:

```
a = []
for x in input().split():
    a.append(float(x))
```

или још краће, помоћу функције `map`, коју ћемо касније детаљније објаснити:

```
a = list(map(float, input().split()))
```

Често је потребно у петљи проћи кроз све елементе листе. То је могуће урадити на неколико начина. Ако су нам потребне само вредности елемената листе, у Пајтону је најприроднији облик:

```
a = []
... # formiramo listu
for x in a:
  # koristimo vrednost x tekuceg elementa liste
```

Ако је потребно и да елементе листе мењамо током обраде, можемо дохватати поједине елементе помоћу индекса, који се креће од 0 до броја елемената листе. Број елемената листе се може одредити помоћу функције `len`.

```
a = []
... # formiramo listu
for i in range(len(a)):
  # koristimo i po potrebi menjamo a[i]
```

За разлику од бројева, логичких вредности, ниски и торки, који су *вредносни типови*, листа је *референтни тип*. То значи да када функцији проследите листу као аргумент, промене садржаја листе које се догоде у функцији остаће видљиве и након завршетка рада функције.

У Пајтону се као индекси могу користити и негативни бројеви. Индекс `-1` означава последњи елемент, `-2` претпоследњи итд.

Сегмент листе `a` од дате позиције `p` до дате позиције `q`, не укључујући `q`, може да се добије као `a[p:q]`. На пример, ако је `a=[10, 23, 3, 45, 21, 18, 22]`, тада је `a[1:4]` једнако `[23, 3, 45]`. Ако се изостави `p`, подразумева се сегмент од почетка низа `a`, а ако се изостави `q`, подразумева се сегмент до краја низа `a`.

Као и код опсега, и приликом задавања сегмента се може користити и трећи параметар. Тако запис `a[p:q:r]` значи сегмент листе `a` од позиције `p` до позиције `q` (не укључујући `q`) са кораком `r`. корак `r` може да буде и негативан. Тако је на пример за исту листу `a=[10, 23, 3, 45, 21, 18, 22]`, сегмент `a[1::2]` једнак `[23, 45, 18]`, а `a[-3:0:-1]` је једнак `[21, 45, 3, 23]`.

Ако листу доделимо другој промењивој, ми заправо стварамо нову промењиву која садржи референцу на исту листу, тако да једној те истој листи приступамо помоћу два имена (што обично није оно што желимо). Да би се заиста креирала нова листа `b`, која је копија листе `a`, потребно је писати:

```
a = []
... # formiramo listu a
b = a[:]
```

На овај начин се у листу `b` преписује сегмент листе `a` који садржи све елементе листе `a`, то јест, формира се копија листе `a`.

Наредбом `b = a[::-1]` у листи `b` би се нашли сви елементи листе `a` у обрнутом редоследу.

Листу ниски можемо да спојимо у једну ниску позивом `''.join(a)`. На пример, израз `''.join(['1', '2', '3'])` има вредност `'123'`.

6.1.2 Елементарно коришћење низова

Задатак: Испис у обратном редоследу

Написати програм којим се уноси n целих бројева, а затим се унети бројеви приказују у обратном редоследу од редоследа уношења.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($1 \leq n \leq 1000$). У следећих n линија налазе се цели бројеви између -1000 и 1000.

Излаз: На стандардном излазу приказати унете бројеве, сваки у посебној линији, у обратном редоследу од редоследа уношења.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	987
10	14
-123	67
67	-123
14	10
987	

Решење

Да бисмо могли да испишемо учитане елементе у обратном редоследу, потребно је да их након учитавања све складиштмо у неку колекцију, коју ћемо затим исписати у обратном редоследу.

Елементе можемо учитати у листу (тако што у празну листу додајемо један по један елемент помоћу `append`). Елементе исписујемо у петљи која се креће уназад тј. у петљи у којој бројач креће од $n-1$ и у сваком кораку се умањује за 1 док не дође до вредности 0.

```
# broj elemenata niza
n = int(input())

# učitavamo i dodajemo jedan po jedan element u niz
a = []
for i in range(n):
    a.append(int(input())

# ispisujemo niz u obratnom redosledu
for i in range(n-1, -1, -1):
    print(a[i])
```

Елементе можемо учитати и коришћењем компрехенсије.

```
# učitavamo niz
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]

# ispisujemo niz u obratnom redosledu
for i in range(n-1, -1, -1):
    print(a[i])
```

Задатак: Линије у обратном редоследу

Напиши програм који исписује све линије које се учитају са стандардног улаза у обратном редоследу од редоследа учитавања.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају линије текста, све до краја улаза.

Излаз: На стандардни излаз исписати учитане линије у обратном редоследу.

Пример

Улаз	*Излаз*
zdravo	dan
svete	dobar
dobar	svete
dan	zdravo

Решење

Пошто не знамо унапред број линија, за смештање линија морамо употребити колекцију која допушта проширивање додавањем елемената на крај.

Задатак: Најнижа температура

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Решење уз коришћење низа

Ако претпоставимо да су сви елементи учитани у низ (што, као што смо видели, није потребно за решење овог задатка), можемо једноставно употребити библиотечку функцију за одређивање минимума. Са друге стране, можемо и сами имплементирати алгоритам одређивања минимума (ово решење наводимо само да бисмо илустровали да се алгоритми обраде серија елемената у практично неизмењеном облику могу применити и над елементима низа).

```
n = int(input())  # broj gradova
# ucitavamo temperature u svim gradovima
temperature = [int(input()) for i in range(n)]

# algoritam odredjivanja minimuma
min_t = temperature[0]
for i in range(1, n):
    if temperature[i] < min_t:
        min_t = temperature[i]

# ispisujemo minimum
print(min_t)
```

Учитавање и одређивање минимума можемо реализовати и у засебним функцијама.

```
# ucitava se niz brojeva (svaki je u posebnom redu)
def ucitaj_niz():
    n = int(input())  # broj elemenata niza
    a = [int(input()) for i in range(n)]
    return (a, n)

# odredjuje se minimum niza a duzine n
def minimum(a, n):
    # algoritam odredjivanja minimuma
    min_t = a[0]
    for i in range(1, n):
        if a[i] < min_t:
            min_t = a[i]
    return min_t

# ucitavamo niz i njegovu duzinu
(a, n) = ucitaj_niz()
# odredjujemo i ispisujemo minimum
print(minimum(a, n))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Средине

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Решење уз коришћење низова

Задатак можемо решити и уз помоћ низова (мада, као што смо видели, то није неопходно). Главна предност таквог решења је то што елементе у низу можемо једноставно обрађивати коришћењем библиотечких

функција. Чак иако не користимо библиотечке функције, израчунавање средина можемо имплементирати у засебним функцијама, што олакшава фокусирање на једноставније потпроблеме и чиме програмски кôд који напишемо постаје употребљив и у другим програмима. Елементе ћемо учитавати слично као у задатку Читање до краја улаза. У Пајтону можемо да употребимо листу у коју ћемо елементе додавати методом `append`.

Алгоритми којима се средине израчунавају исти су као и у случају обраде појединачних елемената серије без њиховог смештања у низ (на пример, збир елемената серије се израчунава тако што се збир иницијализује на нулу, а затим се у петљи увећава за један по један елемент серије, једино што се сада елементи серије читају из низа уместо са стандардног улаза).

```
import sys

def aritmeticka_sredina(a):
    broj = 0      # broj elemenata niza
    zbir = 0.0    # zbir elemenata niza
    for x in a:           # obrađujemo jedan po jedan element
        broj += 1
        zbir += x
    return zbir / broj    # računamo aritmetičku sredinu

def harmonijska_sredina(a):
    broj = 0                # broj elemenata niza
    zbir_reciprocnih = 0.0   # zbir reciprocnih vrednosti elemenata niza
    for x in a:             # obrađujemo jedan po jedan element
        broj += 1
        zbir_reciprocnih += 1.0 / x
    return broj / zbir_reciprocnih  # računamo geometrijsku sredinu

# ucitavamo elemente niza
a = []
for x in sys.stdin:
    a.append(float(x))

# ispisujemo njihovu aritmeticku i harmonijsku sredinu
print(format(aritmeticka_sredina(a), '.2f'))
print(format(harmonijska_sredina(a), '.2f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Минимално одступање од просека

За дати низ од n реалних бројева одредити вредност најмањег апсолутног одступања од просека вредности унетих бројева (то је најмања апсолутна вредност разлика између елемената и просека низа).

Улаз: У првој линији стандардног улаза уноси се број елемената низа n ($1 \leq n \leq 100$), а затим у следећих n линија елементи низа $-10000 \leq a_i \leq 10000$.

Излаз: Реалан број на две децимале који представља вредност најмањег апсолутног одступања од средње вредности.

Пример

Улаз	*Излаз*
6 2.8 19.3 -4.2 7.5 -11.1 7.17	0.78

Решење

Просечну вредност учитаних бројева већ смо рачунали у неколико задатака (на пример, у задацима Средине и Просек одличних). Просечну вредност не можемо одредити док не учитамо све бројеве. Међутим, када израчунамо ову вредност потребно је поново обрадити све бројеве, тј. израчунати њихово растојање до просека. Пошто смо све бројеве учитали током израчунавања просека, не можемо их поново читати да бисмо рачунали растојања. Зато је неопходно све учитане бројеве упамтити у програму и неопходно је да употребимо неки облик низа.

Када се бројеви учитају у меморију, тада је једноставно израчунати им просек p (као количник збира који рачунамо класично, као у задатку Збир n бројева и броја елемената) и израчунати минимално одступање као минимум низа $|a_i - p|$ за $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (користимо алгоритам минимума пресликаних вредности на исти начин као у задатку Најближи датом целом броју).

```
# učitavamo elemente u listu
n = int(input())
a = [float(input()) for i in range(n)]

# izračunavamo prosek svih elemenata
zbir = 0
for x in a:
    zbir += x
prosek = zbir / n

# određujemo i ispisujemo minimalno rastojanje od proseka
min_rastojanje =  abs(a[0] - prosek)
for i in range(1, n):
    min_rastojanje = min(min_rastojanje, abs(a[i] - prosek))
print(format(min_rastojanje, '.2f'))
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Ниска палиндром

Написати програм којим се проверава да ли је дата реч *палиндром*, што значи да се једнако чита слево на десно и сдесна на лево.

Улаз: Прва и једина линија стандардног улаза садржи реч која се састоји само од малих слова енглеске абецеде.

Излаз: На стандардном излазу приказати реч `da` ако реч представља палиндром, тј. `ne` у супротном.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`madam`	`da`	`ranac`	`ne`

Решење

Линеарна претрага за неодговарајућим карактером

Задатак се може решити тако што се пореде парови карактера из дате ниске и то први карактер и последњи, други и претпоследњи и тако даље. Иако се у овом задатку ради са ниском карактера, а не са низом бројева, ниске можемо посматрати као низове (јер елементе на датим позицијама читамо на потпуно исти начин као да су у питању низови).

Један начин обиласка парова је помоћу две промењиве i и j које представљају позиције карактера који се упоређују. Индекс i иницијализујемо на вредност 0 (почетак ниске), а индекс j иницијализујемо на вредност $n-1$ (крај ниске), а затим мењамо индексе тако да се i (индекс првог елемента у пару) увећава за 1 у сваком пролазу, а j (индекс другог елемента) смањује за 1, све док важи да је $i < j$.

Провера се заснива на алгоритму линеарне претраге (приказаном у задатку Негативан број) и међу паровима се тражи да ли постоји неки у којем су карактери различити. Претрагу је најједноставније имплементирати у склопу функције чија је основа петља која пролази кроз све парове карактера које треба упоредити. Први пут када наиђемо на различите карактере, провера се прекида и функција може да врати `false`, док вредност `true` враћамо на крају функције, након петље којој су проверени сви парови и у којој је утврђено да не постоји различит пар карактера.

```
# provera da li je data niska palindrom
def palindrom(s):
    i = 0; j = len(s) - 1
    while i < j:
        if s[i] != s[j]:
            return False
        i += 1; j -= 1
    return True

# učitavamo nisku i proveravamo da li je palindrom
s = input()
if palindrom(s):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Исти избор парова за поређење у оквиру ниске (са почетка и краја ниске) се може извршити и уз помоћ само једног индекса i, с тим што се онда у петљи пореде елементи низа са позиција i и $n-1-i$, а i се увећава док год је строго мање од вредности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ тј. док је `i < n/2`.

```
# provera da li je data niska palindrom
def palindrom(s):
    n = len(s)
    for i in range(n//2):
        if s[i] != s[n-1-i]:
            return False
    return True

# učitavamo nisku i proveravamo da li je palindrom
s = input()
if palindrom(s):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Погођена комбинација

Сеф се отвара тако што се унесе комбинација цифара. Напиши програм који проверава да ли је унета комбинација тачна и да ли сеф треба да се отвори.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($1 \leq n \leq 100$) а затим и тачна комбинација од n цифара (све цифре су задате у једном реду и раздвојене су размацима). Након тога се уноси комбинација од n цифара коју је корисник сефа унео (свака цифра задата је у посебном реду).

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако је комбинација тачно погођена, тј. `ne` у супротном.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 1 2 3 1 2 3	da

Решење

Да би задатак могао да се реши потребно је у меморију учитати бар елементе прве комбинације, а задатак се лакше решава ако у меморију учитамо обе комбинације. У језику Пајтон за то можемо употребити једну или две листе.

Ако податке учитамо у две листе, задатак постаје тривијалан јер се једнакост садржаја две листе у Пајтону може испитати помоћу оператора ==.

```
# učitavamo obe kombinacije u niz
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
b = [int(input()) for i in range(n)]
# proveravamo da li su sadržaji nizova jednaki
if a == b:
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Функцију која врши проверу једнакости две листе можемо и сами да дефинишемо.

Проверу једнакости можемо да реализујемо алгоритмом линеарне претраге (који смо приказали у задатку Негативан број) тако што проверавамо да ли постоји позиција на којој се у два низа налази различит елемент.

```
# provera da li su dve liste jednake
def jednaki(a, b):
    # prvo poredimo duzine
    if len(a) != len(b):
        return False
    # a zatim jedan po jedan element
    for i in range(len(a)):
        if a[i] != b[i]:
            return False
    return True

# ucitavamo obe kombinacije u liste
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))
b = [int(input()) for i in range(n)]

# proveravamo da li su liste jednake
if jednaki(a, b):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Користећи ову идеју, довољно је да чувамо само први низ, а елементе другог обрађујемо док их учитавамо.

```
# učitavamo prvu kombinaciju u niz
n = int(input())
a = list(map(int, input().split()))

# učitavamo jedan po jedan element druge kombinacije i proveravamo da
# li se razlikuje od odgovarajućeg elementa prve kombinacije
jednaki = True
for i in range(n):
    if a[i] != int(input()):
        jednaki = False
        break

# ispisujemo rezultat
print("da" if jednaki else "ne")
```

Задатак: Парни и непарни елементи

Поштар иде улицом и треба да распореди пошиљке. Одлучио је да прво обиђе једну страну улице (на којој су куће са парним бројевима), а да у повратку обиђе другу страну улице (на којој су куће са непарним бројевима). Напиши програм који за унете бројеве кућа одређује које су на парној, а које на непарној страни улице.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број пошиљки (природан број k мањи од 100), а затим и k природних бројева који представљају бројеве кућа на пошиљкама. Сваки број је задат у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати два реда бројева. У првом реду се налазе сви парни бројеви (исписани у истом редоследу у којем су унети), а у другом сви непарни бројеви (исписани у истом редоследу у којем су унети). Бројеви у сваком реду треба да су раздвојени по једним размаком, а размак може бити наведен и иза последњег броја.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 1 2 3 4 5	2 4 1 3 5

Решење

Коришћење листа

У програму ћемо чувати две листе - једну у којој ћемо чувати парне, а другу у којој ћемо чувати непарне елементе. Учитавамо елемент по елемент, проверавамо да ли је паран или непаран тако што израчунамо остатак при дељењу са 2 (технику провере дељивости израчунавањем остатка видели смо у задатку Збир година браће и сестре) и у зависности од тога додајемо га у одговарајућу листу. Приметимо да се и у овом задатку врши класификација (филтрирање) на основу својстава учитаних бројева (слично као, на пример, у задатку), међутим, пошто је потребно исписати прво парне, па онда непарне бројеве, пре исписа је неопходно бројеве памтити у листи. Нови елемент додајемо на крај листе методом `append`.

```
# niz parnih i niz neparnih brojeva
parni = []; neparni = []

k = int(input())          # ucitavamo broj elemenata
for i in range(k):        # ucitavamo k elemenata
    x = int(input())      #   ucitavamo naredni element
    if x % 2 == 0:        #   ako je paran
        parni.append(x)   #      smestamo ga u niz parnih
    else:                 #   u suprotnom
        neparni.append(x) #      smestamo ga u niz neparnih

# ispisujemo niz ucitanih parnih brojeva
for p in parni:
    print(p, end=" ")
print()

# ispisujemo niz ucitanih neparnih brojeva
for n in neparni:
    print(n, end=" ")
print()
```

Програм можемо организовати и коришћењем помоћних функција за учитавање, испис и филтрирање парних тј. непарних елемената листе.

```
# ucitava niz elemenata
def ucitaj_niz():
    n = int(input())
    a = [int(input()) for i in range(n)]
    return a

# ispisuje niz elemenata (razdvojene razmacima)
def ispisi_niz(a):
    for x in a:
        print(x, end=" ")
```

```
    print()

# formira niz parnih elemenata niza
def izdvoj_parne(a):
    parni = []
    for x in a:
        if x % 2 == 0:
            parni.append(x)
    return parni

# formira niz neparnih elemenata niza
def izdvoj_neparne(a):
    neparni = []
    for x in a:
        if x % 2 != 0:
            neparni.append(x)
    return neparni

# ucitava se niz
a = ucitaj_niz()
# izdvajaju se parni i neparni elementi
parni = izdvoj_parne(a)
neparni = izdvoj_neparne(a)
# ispisuje se rezultat
ispisi_niz(parni)
ispisi_niz(neparni)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Редни број максимума

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Разлика сума до мах и од мах

Уноси се масе предмета, одредити разлику суме маса предмета до првог појављивања предмета највеће масе и суме маса предмета после првог појављивања предмета највеће масе (предмет највеће масе није укључен ни у једну суму).

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се број предмета n ($1 \leq n \leq 50000$). Свака од наредних n линија садржи по један природан број из интервала $[1, 50000]$, ти бројеви представљају масе сваког од n предмета.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати тражену разлику маса.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 10 13 7 13 4	-14

Објашњење

Предмет највеће масе је 13. Збир маса пре његовог првог појављивања је 10, а после његовог првог појављивања је 24. Зато је тражена разлика -14.

Задатак: Просечно одступање од минималног

Дате су цене уређаја у n продавница. Написати програм којим се одређује колико су у просеку цене уређаја скупље од најмање цене уређаја у тим продавницама.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($1 \leq n \leq 200$). У следећих n линија налазе се позитивни реални бројеви који представљају цене уређаја у продавницама.

Излаз: На стандардном излазу приказати на две децимале заокружено просечно одступање цена од минималне цене.

Пример

Улаз	*Излаз*

`4`
`100`
`95`
`120`
`95`
	`7.50`

Задатак: Максимална разлика суседних

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Палиндромска реченица

Написати програм којим се проверава да ли је дата реченица палиндром. Реченица је палиндром ако се једнако чита слево на десно и сдесна на лево, при чему се разматрају само слова и не прави се разлика између великих и малих слова.

Улаз: Прва и једина линија стандардног улаза садржи реченицу (састављену од слова, празнина и интерпукцијских знакова).

Излаз: На стандардном излазу приказати реч `da` ако реченица представља палиндром иначе приказати реч `ne`.

Пример

Улаз	*Излаз*
`Ana voli Milovana!!!`	`da`

Задатак: Провера монотоности

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Поређани датуми

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Прерачунавање миља у километре

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Види другачија решења овог задатка.

6.1.3 Трансформације низова

Задатак: Транслација тачака

Дате су координате n тачака у равни. Транслирати тачке тако да им тежиште буде у координатном почетку.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($1 \leq n \leq 100$). У следећих n линија налазе се по два реална броја, који представљају x и y координате тачака.

Излаз: На стандардном излазу приказати координате тачака после транслације, за сваку тачку у једној линији њену x па y координату, координате одвојити једном празнином и приказати их на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	-1.00 -1.00
0 0	0.00 -1.00
1 0	1.00 2.00
2 3	

Решење

Тежиште T тачака (x_i, y_i) за i од 1 до n има координате $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)$. Транслацијом тачке (x_i, y_i) за вектор (a, b) добија се тачка $(x_i + a, y_i + b)$. Тежиште транслираних тачака је тачка чије су координате $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+a)}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i+b)}{n}\right)$, што је једнако $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + a, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + b\right)$. Тежиште после транслације треба да буде координатни почетак $(0, 0)$. Према томе, потребно је да важи $a = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ и $b = -\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

Дакле, одредимо координате тежишта $T(x_T, y_T)$ датих n тачака, као аритметичку средину x односно y координата датих тачака, тако да је $x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$. Затим дате тачке транслирамо за вектор $(-x_T, -y_T)$.

Координате тачака можемо сместити у два независна низа исте дужине (низ координата x и низ координата y).

Одређивање аритметичке средине (просека) елемената низа можемо урадити применом алгоритма одређивања аритметичке средине серије бројева (види задатак Средине), као количник збира и броја елемената серије. Транслацију можемо такође једноставно урадити трансформацијом оба низа координата у петљи (вршимо пресликавање серије, при чему се резултат смешта на место оригинала).

```
# učitavamo podatke o tačkama
n = int(input())                # broj tačaka
x = []; y = []                  # lista x i lista y koordinata
for i in range(n):              # učitavamo podatke za n tačaka
    s = input().split()
    x.append(float(s[0])); y.append(float(s[1]))

# određujemo poziciju težišta
xT = 0; yT = 0
for i in range(n):
    xT += x[i]; yT += y[i]
xT /= n; yT /= n

# transliramo tačke
for i in range(n):
    x[i] -= xT; y[i] -= yT

# ispisujemo rezultat
for i in range(n):
    print(f'{x[i]:.2f} {y[i]:.2f}')
```

Учитавање низова координата, њихов испис, одређивање тежишта и транслацију можемо издвојити у засебне функције.

```
# učitava niz parova koordinata tačaka
def ucitaj_tacke():
    n = int(input())
    tacke = []
    for i in range(n):
        s = input().split()
        tacke.append([float(s[0]), float(s[1])])
    return tacke

# ispisuje niz koordinata tačaka
def ispisi_tacke(tacke):
    for tacka in tacke:
        print(f'{tacka[0]:.2f} {tacka[1]:.2f}')

# određuje težište niza tačaka
def teziste(tacke):
    xT = 0.0; yT = 0.0
    for tacka in tacke:
        xT += tacka[0]; yT += tacka[1]
    n = len(tacke)
    return (xT / n, yT / n)

# translira niz tačaka za vektor (vx, vy)
def transliraj(tacke, vx, vy):
    for tacka in tacke:
        tacka[0] += vx; tacka[1] += vy

tacke = ucitaj_tacke()
(xT, yT) = teziste(tacke)
transliraj(tacke, -xT, -yT)
ispisi_tacke(tacke)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Избацивање елемената

Број је непожељан у низу целих бројева ако дели укупан број елемената (нпр. у низу дужине 10 су непожељни елементи који деле број 10, а то су 1, 2, 5 и 10). Потребно је пронаћи све непожељне елементе у низу и уклонити их. Након тога се број елемената може променити и неки други елементи могу постати непожељни. Поступак се понавља док се не добије низ без непожељних елемената. Напиши програм који за дати низ одређује збир преосталих елемената, након уклањања непожељних.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 50000$), а затим и n елемената низа из распона од 1 до 100.

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број који представља збир преосталих елеманата у низу, након узастопног уклањања свих непожељних елемената.

Пример

Улаз	*Излаз*
7 1 2 3 4 5 6 7	9

Решење

Основу задатака чини филтрирање низа, тј. избацивање елемената из низа који задовољавају дато својство

(о филтрирању серија елемената већ је било речи у задацима Јутарње температуре и). Ако би се резултат памтио у другом низу, филтрирање бисмо могли извршити тако што бисмо тако што бисмо пролазили кроз све елементе датог низа и сваки који не задовољава својство избацивања (у нашем случају сваки елемент који не дели димензију низа) додавали на крај резултата (слично смо радили у задатку Парни и непарни елементи). Приликом грађења резултујућег низа можемо да одржавамо број елемената тренутно смештених у резултујући низ. Поступак се заправо не разликује много ни ако се филтрирање врши у месту (у истом низу). Наиме, резултат се уместо у посебан низ може смештати на почетак самог низа који се филтрира. Постављањем елемената низа у његов почетни део не постоји опасност да се пребрише неки елемент који још није обрађен.

Филтрирање елемената се понавља све док се његовом применом мења димензија низа. Кôд организујемо кроз бесконачну петљу, након филтрирања проверавамо да ли је број задржаних елемената једнак броју елемената низа, и ако јесте, петљу прекидамо.

```
# učitavamo početne elemente u listu
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]

# ponavljamo sledeći postupak
while True:
    # elemente koji ne dele dužinu liste prebacujemo na njen početak
    k = 0
    for i in range(n):
        if n % a[i] != 0:
            a[k] = a[i]
            k += 1
    # ako se lista nije skratila, prekidamo petlju
    if n == k:
        break;
    # izbacujemo elemente koji nisu prebačeni
    n = k

# izračunavamo i ispisujemo zbir preostalih elemenata
zbir = 0
for i in range(n):
    zbir += a[i]
print(zbir)
```

Учитавање низа, филтрирање и сабирање елемената можемо реализовати и у посебним функцијама, чиме се добија мало прегледнији кôд.

```
# učitava niz
def ucitaj_niz():
    n = int(input())
    a = [int(input()) for i in range(n)]
    return a

# izbacuje sve elemente niza koji dele broj x
def izbaci_delioce(a, x):
    b = []
    for y in a:
        if x % y != 0:
            b.append(y)
    return b

a = ucitaj_niz()                # učitavamo sve elemente u niz
while True:                     # ponavljamo sledeći postupak
    n0 = len(a)                 #   pamtimo početnu dužinu niza
    a = izbaci_delioce(a, n0)   #   izbacujemo sve delioce te dužine
    if n0 == len(a):            #   ako se dužina nije promenila
```

```
        break;                  #       prekidamo petlju

print(sum(a))                   # ispisujemo zbir preostalih elemenata
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Различити елементи низа

Написати програм који учитани низ целих бројева трансформише тако да се свака вредност појављује тачно једном у низу, при чему се чува редослед елемената (редослед њиховог првог појављивања).

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се број елемената низа N ($0 < N \leq 10000$), а затим се, у свакој од N наредних линија стандардног улаза, налази по један члан низа.

Излаз: У свакој линији стандардног излаза исписује се по један елемент трансформисаног низа.

Пример

Улаз	*Излаз*
6	1
1	3
3	2
1	
2	
3	
2	

Решење

Уклањање дупликата из низа се може извршити много ефикасније ако се низ претходно сортира, међутим, у овом задатку се инсистира на задржавају оригиналног редоследа елемената, тако да сортирање није могуће једноставно применити.

Једно могуће решење је да учитавамо један по један од `n` елемената и да за сваки од њих проверавамо да ли се раније већ појавио. Можемо одржавати низ елемената који су се до сада јавили и проширивати га текућим елементом ако и само ако се он већ не налази у том низу.

```
# u listu a ćemo upisivati one elemente koji već nisu u njoj
a = []

# učitavamo n elemenata
n = int(input())
for i in range(n):
    x = int(input())
    if not (x in a):
        a.append(x)

# ispisujemo elemente liste a
for x in a:
    print(x)
```

Такво решење је елегантно, али у тексту задатка се наглашава да се сви елементи већ налазе у низу и да је потребно у истом том низу задржати само по једно појављивање сваког елемента. Низ ћемо трансформисати тако да се елементи који се задржавају стављају у почетни, сређени део низа. При обиласку низа елемент по елемент, за сваки наредни елемент треба проверити да ли је већ укључен у тај сређени део низа. Ако јесте, треба га прескочити, а ако није додајемо га у сређени део низа, на његов крај, и увећавамо дужину сређеног дела низа. Приметимо да се овде заправо примењује алгоритам филтрирања елемената низа који смо описали у задатку Избацивање елемената, при чему је својство потребно да би се елемент уклони то да се не јавља у сређеном почетном делу низа. Провера припадности елемента почетном делу низа може се вршити алгоритмом линеарне претраге (слично као, на пример, у задатку Негативан број). Претрагу је могуће извршити и помоћу засебне функције.

```
# unos elemenata u listu
def unos_niza():
    n = int(input())
```

```
    a = [int(input()) for i in range(n)]
    return (a, n)

# ispisuje prvih n elemenata liste a
def ispis_niza(a, n):
    for i in range(n):
        print(a[i])

# proverava da li se x nalazi među prvih n elemenata liste a
def pripada(x, a, n):
    for i in range(n):
        if a[i] == x:
            return True
    return False

(a, n) = unos_niza()  # učitavamo dužinu i elemente niza

k = 0    # dužina početnog dela niza u koji se smešta rezultat
# sve elemente koji ne pripadaju početnom delu dopisujemo na kraj tog
# početnog dela
for i in range(n):
    if not(pripada(a[i], a, k)):
        a[k] = a[i]
        k += 1
n = k   # dužina skraćenog niza

# ispisujemo konačni rezultat
ispis_niza(a, n)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Обртање низа

Написати програм који учитава низ целих бројева a затим га трансформише тако што се окрећу задати делови низа, од елемента са индексом p до елемента са индексом q, све док се не унесе пар бројева, p и q, у коме је p веће од q.

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се број елемената низа, природан број N ($2 \leq N \leq 10000$), а затим се, у свакој од N наредних линија стандардног улаза, налази по један члан низа. У наредним редовима (њих највише N) се уносе по два цела броја p и q ($0 \leq p \leq q < N$), одвојена празнином док се не унесе ред у коме је први број већи од другог.

Излаз: У свакој линији стандардног излаза исписује се по један елемент трансформисаног низа.

Пример

Улаз	*Излаз*
4	3
1	4
2	1
3	2
4	
0 1	
2 3	
0 3	
1 0	

Решење

Обртање дела низа вршимо тако што размењујемо први елемент тог дела низа са последњим, други са претпоследњим, и тако редом, док не дођемо до средине тог дела низа. Обртање можемо реализовати засебном функцијом.

Постоји неколико начина да се имплементира петља која ово ради (слично ономе што смо приказали у задатку Ниска палиндром). Једна варијанта је да се употребе две променљиве i и j, и да се прва иницијализује на вредност p, а друга на вредност q. У сваком кораку петље се размењују елементи на позицијама i и j, i се увећава за 1, а j се умањује за 1. Петља се извршава све док је $i < j$.

```
def unos_niza():
    n = int(input())
    return [int(input()) for i in range(n)]

def ispis_niza(a):
    for x in a:
        print(x)

# obrtanje dela niza izmedju pozicija p i q (ukljucujuci i njih)
def obrni(a, p, q):
    i = p; j = q
    while i < j:
        a[i], a[j] = a[j], a[i]
        i += 1; j -= 1


# ucitavamo niz
a = unos_niza()
while True:
    # ucitavamo interval [p, q] koji treba obrnuti
    (p, q) = map(int, input().split())
    # ako je interval prazan, prekidamo postupak
    if p > q:
        break;
    # vrsimo obrtanje
    obrni(a, p, q)
# ispisujemo rezultat
ispis_niza(a)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Циклично померање за једно место

Написати програм који учитава низ целих бројева а затим га трансформише тако што се циклично померају задати делови низа од позиције p до позиције q све док се не унесу две једнаке позиције. При томе вршити циклично померање удесно ако је $p < q$, а померње улево вршити ако је $p > q$.

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се број елемената низа n ($1 < n \leq 200$), а затим се, у свакој од n наредних линија стандардног улаза, налази по један члан низа. У наредним редовима се уносе по два цела броја, p и q ($0 \leq p, q < n$), одвојена празнином док се не унесе ред у коме су бројеви једнаки.

Излаз: У свакој линији стандарног излаза исписује се по један елемент трансформисаног низа.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 1 2 3 4 2 3 2 0 1 2 0 0	2 1 4 3

Задатак: Необрисани бројеви

Посматрајмо скуп природних бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, … Прво избришемо сваки други број и посматрани скуп постаје 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, … затим из добијеног скупа бришемо сваки трећи број и добијамо скуп 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, … затим из добијеног скупа бришемо сваки четврти број и тако даље. Скуп необрисаних бројева је 1, 3, 7, 13, 19, … Написати програм којим се за дати природан број n проверава да ли припада скупу необрисаних бројева.

Улаз: Прва линија стандарног улаза садржи природан број n ($n < 5 \cdot 10^5$).

Излаз: Реч `da` ако број n припада скупу необрисаних бројева, у супротном реч `ne`.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
39	da

Пример 2

Улаз	*Излаз*
41	ne

6.1.4 Низови као репрезентација вектора, полинома и великих бројева

Низови се често користе да представе неке математичке објекте: векторе, полиноме и бројеве.

Величине које су одређене само својом бројевном вредношћу (и одговарајућом јединицом) називамо *скаларним величинама* или скраћано *скаларима*. То су, на пример, маса и дужина. Постоје величине које се поред своје бројевне вредности (кажемо и интензитета) задају и својим правцем и смером и њих називамо *вектор̄ским величинама* или *вектор̄има*. Таква је на пример брзина или убрзање.

Вектори се могу представљати као уређене торке бројева и у програмима се могу представити низовима својих координата. Наиме, вектор димензије n задаје се са n координата $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Два тако представљена вектора се могу сабирати (тако што им се саберу одговарајуће координате) и вектор се може помножити скаларом (тако што се свака координата помножи тим скаларом). Значајна је и операција скаларног производа (скаларни производ два вектора се израчунава тако што им се одговарајуће координате помноже и сви тако добијени производи саберу).

Полином често представљамо низом његових коефицијената. Нпр, полином x^3+2x-5 представићемо низом коефицијената $(-5, 0, 2, 1)$. Слично, природни број можемо представити низом његових цифара.

Задатак: Скаларни производ

Написати програм који израчунава скаларни производ два вектора чије се координате уносе са стандардног улаза. Скаларни производ два вектора је збир производа њихових одговарајућих координата (скаларни производ вектора $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ једнак је $a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n$. Димензија вектора није унапред позната, али није већа од 50.

Улаз: У првој линији стандардног улаза задата је димензија вектора n ($2 \leq n \leq 50$). Након тога, у n наредних линија се уносе координате првог вектора, а након тога, у n наредних линија се уносе координате другог вектора.

Излаз: Исписати вредност скаларног производа првог и другог вектора на стандардни излаз.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3 1 2 3 3 2 1	10

Решење

Скаларни производ вектора је збир производа одговарајућих координата вектора. Да бисмо израчунали њихов производ, морамо најпре прочитати векторе са стандардног улаза.

У решењу се учитавају координате првог вектора у први низ и координате другог вектора у други низ. Затим се редом (у петљи) множе одговарајуће координате оба вектора и у сваком се кораку збир (почетно инициja-

лизован на нулу) увећава за производ одговарајућих координата вектора (приметимо да се користи алгоритам сабирања серије бројева, описан у задатку Збир n бројева).

```
# dimenzija vektora
n = int(input())

# ucitavanje prvog vektora
a = [int(input()) for i in range(n)]
# ucitavanje drugog vektora
b = [int(input()) for i in range(n)]

# izracunavanje skalarnog proizvoda
skalarniProizvod = 0
for i in range(n):
    skalarniProizvod += a[i]*b[i]

# ispis resenja
print(skalarniProizvod)
```

Приметимо да за израчунавање производа није неопходно чувати у меморији оба низа, већ је довољно учитати само први вектор у низ, а затим учитавати једну по једну координату другог вектора, множити је са одговарајућом координатом првог вектора и додавати на текући збир.

Задатак: Вредност полинома

Са стандардног улаза се уносе степен n и реални коефицијенти полинома $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot a_1 + a_0$. Напиши програм који израчунава вредност тог полинома у k равномерно распоређених тачака интервала $[p, q]$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза унети n ($2 \leq n \leq 9$) - степен полинома, у следећих $n + 1$ линија реалне вредности коефицијената полинома (редом бројеви $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$), затим, у наредној линији k ($2 \leq k \leq 40$) - број равномерно распоређених тачака на интервалу $[p, q]$, у наредној линији реалну вредност p - почетак интервала, и у наредној линији реалну вредност q - крај интервала.

Излаз: У k линија исписати вредност полинома у равномерно распоређеним тачакама интервала $[p, q]$ заокружену на две децимале.

Пример

Улаз	*Излаз*
2	4.00
1.0	9.00
2.0	16.00
1.0	25.00
7	36.00
1.0	49.00
7.0	64.00

Решење

Хорнерова шема

Вредност полинома

$$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot a_1 + a_0$$

се може израчунати без коришћења операције степеновања ако се полином представи у Хорнеровом облику (који смо описали, на пример, у задатку Јарди, стопе и инчи или UNIX време):

$$y = (((\ldots(((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \ldots + a_1) \cdot x + a_0$$

Ако се y иницијализује са 0, у $n+1$ итерација се израчунава $y = y \cdot x + a_n$, $y = y \cdot x + a_{n-1}$, $\ldots$, $y = y \cdot x + a_0$.

Генерисање k равномерних тачака у интервалу $[p, q]$ описали смо у задатку Подела интервала на једнаке делове. Да би се вредност полинома израчунала у k равномерно распоређених тачака интервала $[p, q]$ - вредност полинома се израчунава у тачкама $p + i \cdot h$ за $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ и $h = (q - p)/(k - 1)$.

```
# vrednost polinoma a[n] * x**n + ... + a[1] * x + a[0]
def vrednost_polinoma(a, n, x):
    # Hornerova shema
    y = 0.0
    for i in range(n, -1, -1):
        y = y*x + a[i]
    return y;

# učitavamo stepen n i koeficijente polinoma a
n = int(input())
a = [float(input()) for i in range(n+1)]
a.reverse() # koeficijente skladištimo u redosledu an, ..., a0

# učitavamo broj tačaka k i granice intervala p, q
k = int(input())
p = float(input()); q = float(input())
h = (q - p) / (k - 1)  # razmak između susednih tačaka
x = p                  # tekuća tacka, krećemo od levog kraja p
for i in range(k):     # izračunavamo vrednost u k tačaka
    print(format(vrednost_polinoma(a, n, x), '.2f'))
    x += h  # prelazimo na narednu tačku
```

Класична дефиниција

Уместо Хорнерове шеме може се употребити и класична дефиниција вредности. Тада се у сваком кораку израчунава степен x^i. Израчунати степен се множи са коефицијентом a_i (који се налази у низу коефицијената `a` на позицији `i`) и додаје на текући збир (који је иницијално постављен на нулу). Једна могућа оптимизација овог поступка (која избегава употребу степеновања) је да се одржава вредност степена (која се иницијализује на 1) и да се у сваком кораку, након увећања збира вредност степена помножи са x (слично како је то приказано у задацима Цифре сдесна и Број формиран од датих цифара здесна на лево). Ипак, Хорнерова шема је најелегантније и најефикасније решење.

```
import math

# vrednost polinoma a[n] * x**n + ... + a[1] * x + a[0]
def vrednost_polinoma(a, n, x):
    y = 0.0
    for i in range(n+1):
        y += a[i] * math.pow(x, i);
    return y

# učitavamo stepen n i koeficijente polinoma a
n = int(input())
a = [float(input()) for i in range(n+1)]
a.reverse() # koeficijente skladištimo u redosledu an, ..., a0

# učitavamo broj tačaka k i granice intervala p, q
k = int(input())
p = float(input()); q = float(input())
h = (q - p) / (k - 1)  # razmak između susednih tačaka
x = p                  # tekuća tacka, krećemo od levog kraja p
for i in range(k):     # izračunavamo vrednost u k tačaka
    print(format(vrednost_polinoma(a, n, x), '.2f'))
    x += h  # prelazimo na narednu tačku
```

Задатак: Аритметика над полиномима

Дата су два полинома, P и Q степенима и низовима својих коефицијената. Одредити њихов збир и производ.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се степен n ($0 \leq n \leq 20$) првог полинома, а у следећих $n+1$ линија реални коефицијенти првог полинома и то редом почев од коефицијента уз највећи степен. Затим се на стандардном улазу налази степен m ($0 \leq m \leq 20$) другог полинома, а у следећих $m+1$ линија реални коефицијенти другог полинома и то редом почев од коефицијента уз највећи степен.

Излаз: Приказати редом збир и производ, сваки у посебној линији. За сваки полином приказати у једној линији његове коефицијенте, на две децимале и то редом почев од коефицијента уз највећи степен.

Пример

Улаз	*Излаз*
2 2 1 2 1 1 -1	2.00 2.00 1.00 2.00 -1.00 1.00 -2.00

Решење

Нека су дати полимоми

$$\begin{aligned} P_n(x) &= p_n \cdot x^n + p_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + x \cdot p_1 + p_0 \\ Q_m(x) &= q_m \cdot x^m + q_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + x \cdot q_1 + q_0 \end{aligned}$$

Збир полинома одређујемо на следећи начин:

- ако су полиноми истог степена ($n = m$) резултат је полином степена n и његови коефицијенти су једнаки збиру одговарајућих коефицијената полинома P и Q,
- ако су полиноми различитих степени нпр. $n > m$ онда је збир полином степена n и коефицијенти од n до $m-1$ једнаки су коефицијентима полинома P, а коефицијенти од m до 0 једнаки су збиру одговарајућих коефицијената полинома P и Q.

Производ полинома P и Q је полином R степена $n+m$. Производ одређујемо тако што множимо сваки моном једног полинома сваким мономом другог полинома и сабирамо добијене мономе истог степена.

$$P \cdot Q = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$$

Сабирање вршимо поступно - на почетку све коефицијенте резултујућег полинома c_k постављамо на нулу, а затим за свако i од 0 до n и за свако j од 0 до m увећамо коефицијент c_{i+j} за вредност производа $p_i \cdot q_j$ (приликом множења монома $p_i \cdot x^i$ мономом $q_j \cdot x^j$ добијамо моном $p_i \cdot q_j \cdot x^{i+j}$, који се додаје моному $c_{i+j}x^{i+j}$ тренутно акумулираном у резулату).

У имплементацији коефицијенте полинома и степен полинома можемо чувати обједињене унутар структуре.

```
# ucitavanje stepena i koeficijenata polinoma
def unos():
    n = int(input())
    P = [float(input()) for i in range(n+1)]
    P.reverse()
    return (P, n)

# prikaz koeficijenata polinoma
def prikaz(P, n):
    for i in range(n, -1, -1):
        print(format(P[i], '.2f'), end=" ")
    print()
```

```
# zbir polinoma P stepena n i Q stepena m
def zbir(P, n, Q, m):
    s = max(n, m)     # stepen rezultata
    R = [0] * (s+1)   # koeficijenti rezultata
    for i in range(0, s+1):
        if i <= n:
            R[i] += P[i]
        if i <= m:
            R[i] += Q[i]
    return (R, s)

# proizvod polinoma P stepena n i Q stepena m
def proizvod(P, n, Q, m):
    s = n + m          # stepen rezultata
    R = [0] * (s+1)    # koeficijenti rezultata
    for i in range(n+1):
        for j in range(m+1):
            R[i+j] += P[i] * Q[j]
    return (R, s)

(P, n) = unos()
(Q, m) = unos()
(R, s) = zbir(P, n, Q, m)
prikaz(R, s)
(R, s) = proizvod(P, n, Q, m)
prikaz(R, s)
```

Задатак: Збир два троцифрена

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Сабирање се може уопштити и на случај вишецифрених бројева, ако се они представе низовима цифара и употреби се петља.

```
# ucitavamo sve cifre
a = [int(input()) for i in range(3)]
a.reverse()
b = [int(input()) for i in range(3)]
b.reverse()
z = [0, 0, 0, 0]
# sabiramo cifre odmah vrseci prenos
prenos = 0
for i in range(3):
    zbirCifara = a[i] + b[i] + prenos
    z[i] = zbirCifara % 10
    prenos = zbirCifara // 10
z[3] = prenos

# ispisujemo rezultat preskacuci vodece nule
j = 3
while j > 0 and z[j] == 0:
    j -= 1
while j >= 0:
    print(z[j], end="")
    j -= 1
print()
```

Задатак: Линеарна функција над великим бројевима

У великом броју језика основни типови података (нпр. `int`) могу исправно да представе само ограничен распон бројева. Напиши програм који израчунава вредност функције $a \cdot x + b$, ако су a, b и x јако велики цели бројеви.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају три цела броја a, b и x (са најмање 3, а највише 100 цифара), сваки у посебној линији.

Излаз: На стандардни излаз исписати вредност израза $a \cdot x + b$.

Пример

Улаз	*Излаз*

`123456789`
`987654321`
`999999999`
	`123456789864197532`

Решење

Бројеве ћемо представити низовима цифара.

Алгоритам сабирања можемо вршити на исти начин као у задатку Збир два троцифрена. Чувамо тренутни пренос (који иницијализујемо на нулу) и у сваком кораку сабирамо текуће цифре два броја (ако нека не постоји, јер је један број краћи од другога, тада на месту те цифре рачунамо да се налази нула) и пренос са претходне позиције, цифру резултата одређујемо као остатак добијеног збира при дељењу са 10, а нови пренос као целобројни количник тог збира при дељењу са 10. Ако нам након сабирања свих цифара остане пренос који је већи од нуле, тада њега уписујемо на место највеће тежине резултата (додајемо га на крај низа цифара којима је представљен резултат).

Ипак, елегантнији кôд можемо добити ако операцију извршимо у две фазе (и та је техника приказана у задатку Збир два троцифрена). У првој фази можемо само сабрати коефицијенте на одговарајућим позицијама (поново водећи рачуна о томе да бројеви не морају бити исте дужине). Суштински, у овој фази израчунавамо збир два полинома, исто као у задатку Аритметика над полиномима. У другој фази вршимо нормализацију добијеног резултата, тако што вршимо пренос све док не обезбедимо услов да су све цифре броја између 0 и 9. Крећемо од почетка низа (цифре најмање тежине), преносимо на следећу позицију целобројни количник те цифре и броја 10, а на позицију те цифре уписујемо целобројни остатак те цифре при дељењу са 10. Обратимо пажњу да број цифара треба да буде за 1 већи од броја цифара дужег од два броја који се сабирају. Ако се приликом нормализације не изврши пренос на ту позицију (ако тај последњи елемент низа остане нула), та се цифра може уклонити из низа.

Са функцијом нормализације на располагању, веома је једноставно извршити и множење. Примењујемо алгоритам множења полинома описан у задатку Аритметика над полиномима и затим позивамо функцију нормализације.

```
def normalizuj(c):
    n = len(c)
    for k in range(n - 1):
        c[k + 1] += c[k] // 10
        c[k] %= 10
    if c[n - 1] == 0:
        del c[n - 1]

def saberi(a, b):
    na = len(a); nb = len(b)
    n = max(len(a), len(b))
    c = [0] * (n + 1)
    for i in range(n):
        c[i] = 0
        if i < na:
            c[i] += a[i]
        if i < nb:
            c[i] += b[i]
    normalizuj(c)
    return c
```

```
def pomnozi(a, b):
    na = len(a); nb = len(b)
    n = na + nb
    c = [0] * n
    for i in range(na):
        for j in range(nb):
            c[i + j] += a[i] * b[j]
    normalizuj(c)
    return c

def pisiBroj(broj):
    rez = []
    for i in range(len(broj)-1, -1, -1):
        rez.append(chr(ord('0') + broj[i]))
    return "".join(rez)

def citajBroj():
    s = input()
    n = len(s)
    rez = [ord(s[n - 1 - i]) - ord('0') for i in range(n)]
    return rez

a = citajBroj()
b = citajBroj()
x = citajBroj()
print(pisiBroj(saberi(pomnozi(a, x), b)))
```

Библиотечка репрезентација великих бројева

У језику Пајтон основни тип података за рад са целим бројевима `int` нема ограничен распон и задатак се решава тривијално.

```
a = int(input())
b = int(input())
x = int(input())
print(a * x + b)
```

6.1.5 Библиотечке функције за рад са низовима

У овом поглављу ћемо приказати решења заснована на употреби библиотечких колекција (низова, листи, вектора и сл.) и функција. Нагласимо да се већина задатака из овог поглавља може решити и без употребе колекција. Иако је програмски кôд таквих решења обично дужи, она су свакако меморијски ефикаснија. Такође, таква решења се могу сматрати илустративнијим, јер се кроз њих изучавају веома важни, фундаментални алгоритми. Са друге стране, у неким ситуацијама у програмирању ћемо елементе морати сместити у низ или ћемо их из неког разлога већ имати у том облику. Тада се применом библиотечких функција могу добити веома кратка и елеганта решења. Библиотечке функције ћемо у овом поглављу приказати кроз веома једноставне задатке у којима њихова примена не мора да буде оптималан избор.

Функције језика Пајтон које ће овде бити објашњене, могу осим листи да користе и друге колекције као аргументе. Ми ћемо овде показивати како те функције функционишу на примеру листи, јер су листе врста колекција коју смо до сада најбоље упознали. У наредним објашњењима подразумева се да је `a` листа.

Функција `sum(a)` враћа збир свих елемената листе `a`.

Функција `min(a)` враћа најмањи елеменат листе `a`. Ако се позове са `min(a, key=f)`, где је `f` дата функција, онда враћа елеменат листе за који је вредност функције `f` најмања. Уколико се најмања вредност добија за више елемената листе, резултат је први елемент слева, за који функција даје најмању вредност.

Функција `max(a)` враћа највећи елеменат листе `a`. Ако се позове са `max(a, key=f)`, где је `f` дата функција, онда враћа елеменат листе за који је вредност функције `f` највећа. Уколико се највећа вредност добија за више елемената листе, резултат је први елемент слева, за који функција даје највећу вредност.

Функција `len(a)` враћа број елемената (дужину) листе `a`.‘

Резултат **операције `(x in a)`** је логичка вредност, која говори да ли се вредност `x` појављује у листи `a`.

Функција `a.count(x)` враћа број појављивања вредности `x` у листи `a`.

Функција `a.index(x)` враћа позицију првог појављивања вредности `x` у листи `a`. Уколико вредности `x` нема у листи `a`, долази до грешке и извршавање програма се прекида.

Позивом `''.join(a)` можемо листу (или део листе) `a`, чији су елементи ниске, да спојимо у једну ниску. На пример, израз `''.join(['spa', 'ja', 'nje'])` има вредност `'spajanje'`.

Ако желимо да на спојевима убацимо неки текст, на пример црту, можемо да пишемо `'-'.join(['spa', 'ja', 'nje'])` и добићемо `'spa-ja-nje'`.

Помоћу **функције `reversed`** можемо да обрнемо секвенцу (листу, ниску) вредности, или њен део. На пример, програм

```
print(''.join(reversed('abcd')))

print(list(reversed([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])))

a = [1, 2, 3, 4, 5]
a[1:4] = reversed(a[1:4])
print(a)
```

исписује

```
dcba
[9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
[1, 4, 3, 2, 5]
```

Функција `any(a)` враћа `True` ако је бар један елемент листе `a` тачан или непразан (то јест, може да се имплицитно конвертује у `True`). Вредност `0`, као и празне колекције (празна листа, празна торка, празна ниска, итд.) се имплицитно конвертују у `False`, а све остале вредности у `True`. На пример, ако листа `a` има неку од вредности

- `[]` (празна листа),
- `[False, False, False]` (листа у којој су сви елементи `False`),
- `[[], {}, 2 < 1, False, 0]` (листа у којој су сви елементи `False` или се могу конвертовати у `False`),

онда `any(a)` враћа `False`, а ако је `a` једнако некој од листи

- `[2 > 1]` (израз чија је вредност `True`)
- `['0']` (непразна ниска, која се имплицитно конвертује у `True`)
- `[True, False, False, False]` (бар један елемент је `True`)

онда `any(a)` враћа `True`. Уграђена функција `any` је еквивалентна са:

```
def any(a):
    for element in a:
        if element:
            return True
    return False
```

Функција `all(a)` враћа `True` ако су сви елементи листе `a` тачни или непразни (то јест, могу да се имплицитно конвертују у `True`). На пример, ако листа `a` има неку од вредности

- `[]` (празна листа - у њој су све вредности тачне)
- `[2 > 1, 3 > 2, 4 > 3]` (вредности свих елемената су `True`)
- `['0']` (непразна ниска, која се имплицитно конвертује у `True`)
- `[1, True, 'neprazna']` (листа у којој су сви елементи `True` или се могу конвертовати у `True`)

онда `all(a)` враћа `True`, док на пример `all([True, True, False, True])` враћа `False`. Уграђена функција `all` је еквивалентна са:

```
def all(a):
    for element in a:
```

```
        if not element:
            return False
    return True
```

Функција `map` нам омогућава да неку дату функцију применимо на сваки елемент листе (колекције) `a`. На пример, после наредби:

```
def f(x):
    return x*x

a = [1, 2, 3]
b = list(map(f, a))
```

листа `b` би била једнака `[1, 4, 9]`. Видимо да је први аргумент функције `map` функција коју примењујемо на елементе листе, која је други аргумент функције `map`.

Функција `map` се врло често примењује на овај начин:

```
m, n, k = map(int, input().split())
```

Када се очекује да корисник у једном реду унесе три цела броја раздвојена размаком, ово је кратак начин да те целобројне вредности доделимо променљивама `m`, `n`, `k`. Слично томе, ако се у једном реду уносе 4 реална броја раздвојена размаком, следећом наредбом можемо да те реалне бројеве доделимо променљивама `a`, `b`, `c`, `d`.

```
a, b, c, d = map(float, input().split())
```

Функција `zip` од две или више колекција формира колекцију торки. Ово је згодно када је потребно проћи кроз две или више колекција упоредо. На пример, следећи програм показује како помоћи функције `zip` можемо да пређемо упоредо кроз елементе три листе.

```
imena = ['Petar', 'Jovan', 'Lazar']
godine = [67, 35, 16]
zanimanja = ['penzioner', 'pisac', 'ucenik']
for ime, zanimanje, godine in zip(imena, zanimanja, godine):
    print(ime, 'je', zanimanje, 'i ima', godine, 'godina.')
```

Програм исписује:

```
Petar je penzioner i ima 67 godina.
Jovan je pisac i ima 35 godina.
Lazar je ucenik i ima 16 godina.
```

Функција `reduce` служи да се нека дата функција `f` која има два аргумента, примени слева на десно на све елементе дате листе, тако да се добије једна вредност. На пример, ако резултат функције `f(x,y)` означимо са $x \circ y$, онда `reduce(f, [a, b, c, d])` даје резултат $((a \circ b) \circ c) \circ d$. Овде подразумевамо да функција `f` враћа резултат истог типа којег су и њени аргументи.

Следећи пример илуструје како може да се користи функција `reduce`.

```
def max_abs_2(x, y): return x if abs(x) >= abs(y) else y

def max_abs_n(a): return reduce(max_abs_2, a)

print(max_abs_n([3, -2, -5, 4]))
```

Функција `max_abs_2` очекује два броја као аргументе, а враћа број који има већу апсолутну вредност (ако су им апсолутне вредности једнаке, враћа први број). Функција `max_abs_n` очекује листу бројева као аргумент, а враћа број из листе који има највећу апсолутну вредност (односно први такав број). У наведеном примеру биће исписана вредност `-5`.

Функција `dropwhile` омогућава да изоставимо неколико (нула или више) елемената на почетку колекције (нпр. листе). Функција добија два параметра. Први параметар је функција `f` која враћа логичку вредност, а други је колекција `a`. Функција `f` се примењује редом на елементе колекције `a` и док год је резултат функције `f` једнак `True`, ти елементи бивају прескочени, односно изостављени. Резултат је нова колекција, у којој се налазе елементи колекције `a` почев од првог за који функција `f` даје вредност `False`, па до краја колекције.

На пример, у следећем програму се тражи први елемент за који функција `nije_nula` враћа `False`, а то је прва (а у овом случају и једина) нула. У листи `b` ће се наћи елементи листе `a` почев од те нуле па на даље, па ће листа `b` имати вредност `[0, 3, 1, 4]`.

```
from itertools import dropwhile

def nije_nula(x): return x != 0

a = [2, 3, 7, 5, 0, 3, 1, 4]
b = list(dropwhile(nije_nula, a))
print(b)
```

Анонимне функције. Видели смо да неке функције (на пример `map`, `reduce`, `dropwhile`) прихватају другу функцију као свој параметар. Често се дешава да је функција коју прослеђујемо као аргумент веома кратка, као што је то био случај у овом примеру:

```
def f(x):
    return x*x

a = [1, 2, 3]
b = list(map(f, a))
```

У ситуацији када нам је функција `f` потребна само на том једном месту и не намеравамо да је касније позивамо, можемо да наведемо анонимну (безимену) функцију директно као аргумент функције `map`. Анонимна функција се пише тако што се наведе реч `lambda`, иза које следи променљива која представља параметар анонимне функције, затим двотачка `:` и израз који представља вредност функције. Например, функција `f` из претходног примера се као анонимна функција пише овако: `lambda x : x*x` (ово значи да се параметар `x` пресликава у `x*x`). Тако би претходни сегмент кода могао равноправно да се замени са

```
a = [1, 2, 3]
b = list(map(lambda x : x*x, a))
```

Слично овоме, у позиву функција `min` и `max` са именованим параметром `key`, као вредност параметра `key` може да се наведе анонимна функција. Тако наредбом `b = min(a, key = lambda x : x % 10)` `b` добија вредност оног елемента колекције `a`, који има најмањи остатак при дељењу са 10, то јест вредност оног елемента колекције `a`, који има најмању цифру јединица. На пример, вредност израза `min([25, 371, 8, 21], key = lambda x : x % 10)` је `371`, јер је то први број са најмањом цифром јединица.

Колекције генерисане члан по члан. Неке функције и изрази у Пајтону враћају колекције, врло сличне листама. На пример, функција `range`, коју смо раније упознали и до сада често користили, враћа опсег, који је једна врста колекције. Слично се понашају и функције `reversed`, `map`, `zip` и `dropwhile`, које смо овде објаснили. Овакве колекције могу једноставно да се претворе (конвертују) у листу. На пример, ако је `r` резултат функције `range`, онда `list(r)` враћа листу која садржи исте елементе као и дат опсег.

Важна предност опсега у односу на листу је да опсег не чува своје елементе у меморији (као што то чини листа), него се његови елементи генеришу један по један, и то тек када су потребни у програму. Самим тим, у случају велике колекције вредности, опсег заузима много мање меморије од листе. Слично важи и за друге набројане функције и неке изразе који производе колекције.

Због тога колекције добијене радом таквих функција не треба без разлога претварати у листе иако је оваква конверзија увек могућа, јер се тиме заузима простор који (зависно од конкретне колекције) може бити веома велики, а због тога и програм може да да ради спорије.

Посебна језичка конструкција у Пајтону, која се зове компрехенсија листе, такође производи колекцију. Један облик компрехенсије смо већ користили при учитавању листе. То је запис `a = [float(input()) for i in range(n)]`. Слично томе, можемо да пишемо `a = [2*i+1 for i in range(5)]`, чиме променљивој `a` додељујемо вредност листе [1, 3, 5, 7, 9]. Уместо `2*i+1` могу да стоје разни други изрази, који обично користе вредност `i` (мада не морају).

При употреби компрехенсије можемо да користимо и услов. На пример, наредбом `b = [x for x in a if x % d == m]` се формира листа `b`, која садржи све оне елементе листе `a`, који при дељењу са `d` дају остатак `m`.

Ако у наставку програма добијену листу користимо тако што приступамо њеним елементима преко реда, мењамо им вредност и слично, онда је оправдано да заиста креирамо листу. Са друге стране, ако на пример

намеравамо да само једном помоћу `for` петље прођемо све елементе колекције, онда је боље **користити обле уместо угластих (коцкастих) заграда** - `b = (float(input()) for i in range(n))`. На тај начин се уместо листе креира генератор, то јест колекција чији елементи се не налазе у меморији, него се редом стварају кад је потребно.

Поред одличне особине да штеде меморију, објекти генератори имају и једнуману, а то је да се кроз њихове елементе може проћи само једном. Неке генераторе је након дохватања свих елемената могуће "ресетовати", тако да се кроз елементе колекције може поново проћи. То међутим није изводљиво за генераторе формиране од улазних података. Због тога ћемо конвертовати у листе оне колекције улазних података кроз које је потребно да прођемо више пута.

Задатак: Бројеви од a до b

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Функција `range` у комбинацији са `for` петљом је у Пајтону основни начин да се одређене наредбе изврше за сваку вредност из датог опсега. Због тога је решење које иначе спада у ово поглавље већ приказано у првом појављивању задатка (у Пајтону не постоји елементарније решење).

На овом месту можемо да нагласимо да је резултат функције `range(a, b + 1)` објекат који производи колекцију "мало по мало", као што је објашњено у уводу овог поглавља.

```
a = int(input()); b = int(input())
r = range(a, b + 1)
for x in r:
   print(x)
```

Задатак: Збир n бројева

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

У језику Пајтон збир елемената листе можемо веома једноставно добити функцијом `sum`.

```
n = int(input()) # broj brojeva
a = (int(input()) for i in range(n)) # učitavamo n brojeva
zbir = sum(a)    # određujemo i ispisujemo njihov zbir
print(zbir)
```

Задатак: Просек свих бројева до краја улаза

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Ако би сви елементи били смештени у неку колекцију, тада бисмо просек могли једноставно израчунати библиотечким функцијама. Пошто не знамо унапред колико ће елемената бити на улазу потребно је да користимо неку колекцију којој можемо додавати елементе. У језику Пајтон погодно је да елементе учитамо у листу (било компрехенсијом или тако што их један по један додајемо у листу методом `append`).

```
import sys
a = [int(linija) for linija in sys.stdin]
prosek = sum(a) / len(a)
print(format(prosek, '.5f'))
```

Задатак: Факторијел

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Библиотечке функције

У Пајтону се производ елемената колекције може израчунати помоћу функције `reduce` којој се као аргумент наводи функција која одређује бинарну операцију којом се број добијеним обрадом претходних елемената у колекцији обједињава са наредним елементом колекције. Функција `reduce` не прима иницијалну вредност, већ обраду започиње иницијализујући резултат на први елемент колекције, а затим га применом наведене функције агрегира са једним по једним елементом колекције кренувши од другог. Колекцију која садржи бројеве можемо једноставно добити функцијом `range`, чији елементи (као што сада знамо) нису истовремено смештени у меморији, већ се по потреби генеришу један за другим.

```
from functools import reduce

# proizvod dva broja
def prod_2(x, y):
    return x * y

# proizvod kolekcije
def prod(kolekcija):
    return reduce(prod_2, kolekcija)

n = int(input())
faktorijel = prod(range(1, n+1)) # proizvod raspona brojeva [1, n+1)
print(faktorijel)
```

Решење помоћу функције `reduce` се може записати и краће. Функција која рачуна производ два броја је врло кратка, па може да се дефинише као ламбда-функција. У том случају на месту на коме бисмо писали име функције, писаћемо целу функцију.

Задатак: Најнижа температура

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Још једно решење већ описано у задатку Најлошији контролни је да се температуре у свим градовима учитају у један низ и да се онда за проналажење минимума употреби библиотечка функција. У Пајтону се може употребити функција `min()`. У овом задатку можемо избећи формирање листе улазних вредности, па ћемо користити генератор. Тиме задржавамо удобност употребе библиотечких функција, а избегавамо меморијску неефикаснот коју проузрокује стварање листе.

```
n = int(input())   # broj gradova
# ucitavamo sve temperature
temperature = (int(input()) for i in range(n))
# određujemo i ispisujemo konačni rezultat
print(min(temperature))
```

Задатак: Претицање

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Низови и библиотечке функције

Задатак опет можемо решити применом библиотечких функција. Могуће је да сва пронађена времена претицања убацимо у низ и да применимо библиотечку функцију за налажење максимума низа (о овоме је било речи у задатку Најлошији контролни). Проблем са овим решењем је то што не знамо унапред колико ће претицања бити тј. колико елемената низ треба да има. У језику Пајтон елементе у листу можемо додавати методом `append` и она ће се аутоматски проширивати колико је потребно. Проверу да ли је ниска непразна можемо извршити навођењем њеног имена у услову гранања, а максимум можемо одредити методом `append`.

```
def vremePreticanja(tA, vA, tB, vB):
    return (vB*tB - vA*tA) / (vB - vA)

# ucitavamo podatke:
#   vremena u kome su tri vozila krenula sa starta
#   brzine ta tri vozila
str = input().split(); t1 = float(str[0]); v1 = float(str[1])
str = input().split(); t2 = float(str[0]); v2 = float(str[1])
str = input().split(); t3 = float(str[0]); v3 = float(str[1])

preticanja = []

if v2 > v1:
    preticanja.append(vremePreticanja(t1, v1, t2, v2))
if v3 > v1:
    preticanja.append(vremePreticanja(t1, v1, t3, v3));
if v3 > v2:
    preticanja.append(vremePreticanja(t2, v2, t3, v3))

if preticanja:
    print(format(max(preticanja), '.2f'))
else:
    print(”nema”)
```

Задатак: Најтоплији дан

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Једно елегантно решење је да се употребе низови и библиотечке функције за одређивање максимума низа.

Библиотечка функција `max` враћа вредност максимума, тако да је његову позицију могуће одредити накнадно, методом `index`, која одређује позицију првог појављивања прослеђене вредности у листи на којој је позвана. Позиције које врати `index` се броје од нуле, а дани од јединице, па је резултат потребно повећати за један. Ово решење захтева два проласка кроз низ, међутим, ти проласци се врше унутар библиотечких функција, па ово решење може бити чак и ефикасније од оног у ком се у петљи одређује позиција максимума (петље које се одвијају у библиотечким функцијама често су брже него оне имплементиране у програмском језику Пајтон).

```
t = [int(input()) for i in range(7)]      # niz temperatura
rbrNajtoplijegDana = t.index(max(t)) + 1
print(rbrNajtoplijegDana)
```

Могуће је и решење у коме избегавамо формирање листе и заузимање простора, а ипак користимо функцију `max` која нам даје кратко и ефикасно решење.

Можемо да формирамо колекцију парова (температура, дан), а затим да тражимо максималан пар. Овде треба решити додатни мали проблем: у случају вишеструког појављивања највише температуре, максималан пар би представљало последње појављивање те температуре (због поређења друге компоненте у пару). Да би одговор био исправан и у том случају, у парове ћемо стављати редни број дана са негативним предзнаком.

Задатак: Минимално одступање од просека

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Кроз колекцију улазних вредности ћемо проћи два пута: једном када одређујемо суму (која је потребна за рачунање просека), а други пут када тражимо елемент најближи просеку. Због тога ћемо од улазних вредности формирати листу.

Функцију која пресликава елемент улазног низа у његово растојање од просека ћемо реализовати као анонимну функцију (ламбда-функцију): `lambda x: abs(x - prosek)`.

```
n = int(input())
a = [float(input()) for i in range(n)]
prosek = sum(a) / n
najblizi = min(a, key = lambda x: abs(x - prosek))
min_rastojanje = abs(najblizi - prosek)
print(format(min_rastojanje, '.2f'))
```

Још једна могућност је да након одређивања просека формирамо колекцију растојања елемената улазне листе од просека, а онда да нађемо минимум те колекције (која не мора да буде листа). Колекција се може формирати функцијом `map`, чији је параметар анонимна функција којом се трансформишу елементи улазне колекције (и њу смо већ користили у задатку Прерачунавање миља у километре).

```
n = int(input())
a = [float(input()) for i in range(n)]
prosek = sum(a) / n
min_rastojanje = min(map(lambda x:  abs(x - prosek),  a))
print(format(min_rastojanje, '.2f'))
```

Варијација решења са формирањем колекције растојања елемената улазне листе од просека је да умсето функције `map` користимо компрехенсију.

Задатак: Максимална разлика суседних

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Коришћење низа

Једно решење је да се сви бројеви прво учитају у низ, да се након тога креира низ апсолутних разлика суседних елемената и да се и да се затим максимална разлика одреди библиотечком функцијом. Ово решење троши више меморије него што је неопходно.

```
# broj elemenata koji se ucitava
n = int(input())
# ucitavamo sve elemente u niz
a = [int(input()) for i in range(n)]
# kreiramo niz apsolutnih razlika početnog niza
razlike = [abs(a[i]-a[i-1]) for i in range(1, n)]
# određujemo i ispisujemo maksimalnu razliku
print(max(razlike))
```

Задатак: Прерачунавање миља у километре

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Под претпоставком да је серија елемената смештена у неку колекцију, могуће је употребити библиотечку подршку за пресликавање.

Колекција дужина у миљама се добија функцијом `range`. Колекција дужина у километрима се добија функцијом `map`. Пошто је потребно проћи кроз обе колекције одједном, формираћемо колекцију парова (миље, километри) помоћу функције `zip`. Напомињемо да ниједна од ове три колекције не заузима велики простор у меморији (свим трима се елементи генеришу на захтев).

Задатак: Транслација тачака

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Задатак можемо решити и применом библиотечких функција.

```
n = int(input())
tacke = [list(map(float, input().split())) for i in range(n)]
(xT, yT) = (sum(map(lambda t: t[0], tacke)) / n,
            sum(map(lambda t: t[1], tacke)) / n)
tacke = map(lambda t: (t[0] - xT, t[1] - yT), tacke)
for x, y in tacke:
    print(f'{x:.2f} {y:.2f}')
```

Задатак: Магацин сокова

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Потребно је израчунати збир елемената серије бројева коју добијамо пресликавањем тј. применом функције $h(f) = \left\lceil \frac{f}{k} \right\rceil$ на серију бројева флаша на свакој полици. Стога до решења можемо доћи и применом библиотечких колекција и функција. За серију улазних података можемо да формирамо генератор уместо листе, јер се кроз податке пролази само једном. Пресликавање бројева флаша у бројеве одговарајућих гајбица остварујемо помоћу компрехенсије, чији резултат прослеђујемо функцији `sum`, да бисмо добили збир пресликаних елемената.

Решење је ефикасно и у смислу заузећа меморије (нисмо формирали ниједну листу) и и смислу брзине, јер су библиотечке функције ефикасније од петљи у програму.

```
# broj polica i broj flasa u gajbici
n = int(input())
k = int(input())
# ucitavamo broj flasa na svakoj polici
broj_flasa = (int(input()) for i in range(n))
# izracunavamo i ispisujemo ukupan broj gajbica
ukupan_broj_gajbica = sum((f + k - 1) // k for f in broj_flasa)
print(ukupan_broj_gajbica)
```

За серију улазних података и овде можемо да формирамо генератор уместо листе, јер се кроз податке пролази само једном. Пресликавање бројева флаша у бројеве одговарајућих гајбица остварујемо помоћу функције `map`. Збир пресликаних елемената добијамо помоћу функције `sum`.

И ово елегантно решење је ефикасно и по заузетој меморији и по утрошеном времену, као и решење са компрехенсијом (не формирају се листе, користе се ефикасне функције).

```
# broj polica i broj flasa u gajbici
n = int(input())
k = int(input())
# ucitavamo broj flasa na svakoj polici
broj_flasa = (int(input()) for i in range(n))
```

```
# izracunavamo broj gajbica potrebnih za flase na svakoj polici
broj_gajbica = map(lambda f: (f + k - 1) // k, broj_flasa)
# izracunavamo i ispisujemo ukupan broj gajbica
ukupan_broj_gajbica = sum(broj_gajbica)
print(ukupan_broj_gajbica)
```

Задатак: Средине

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Ако претпоставимо да све брзине учитавамо у неку колекцију, до решења можемо једноставно стићи применом библиотечких функција.

```
import sys

v = [float(linija) for linija in sys.stdin]
zbir = sum(v)
broj = len(v)
zbir_reciprocnih = sum(1.0 / x for x in v)
aritmeticka_sredina = zbir / broj
harmonijska_sredina = broj / zbir_reciprocnih
print(format(aritmeticka_sredina, '.2f'))
print(format(harmonijska_sredina, '.2f'))
```

Задатак: Бројеви дељиви са 3

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Све елементе можемо да сместимо у генераторску колекцију, а затим користећи компрехенсију са условом да директно генеришемо бројеве које треба исписати. У овом решењу се не формирају листе.

```
n = int(input())
a = (int(input()) for i in range(n))
for x in (x for x in a if x % 3 == 0):
    print(x)
```

Задатак: Просек одличних

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Од улазних података можемо да формирамо генератор. Задатак се једноставно решава ако компрехенсијом формирамо **листу** просека одличних ученика. На даље бисмо помоћу функције `len` одредили број одличних ученика а затим по потреби помоћу функције `sum` и збир њихових просечних оцена.

```
n = int(input())
proseci = (float(input()) for i in range(n))
proseci_odlicnih = list(x for x in proseci if x >= 4.5)
if len(proseci_odlicnih) > 0:
    prosek_odlicnih = sum(proseci_odlicnih) / len(proseci_odlicnih)
    print(format(prosek_odlicnih, '.2f'))
else:
    print("-")
```

Размотримо овде и једно другачије решење, у коме нећемо формирати листе. Употреба функција `sum` и `len` захтева два пролаза кроз колекцију `proseci_odlicnih`, што у случају генератора није могуће. Због тога ћемо уместо тих функција користити функцију `reduce`, која ће у једном пролазу израчунати број и збир просека одличних ученика. Да би функција `reduce` вратила две вредности, извршићемо је над колекцијом парова, уместо колекције просечних оцена. Први елемент пара је просечна оцена одличног ученика, а други елемент је број 1. Сабирањем првих компоненти добићемо збир просека одличних ученика, а сабирањем других компоненти број одличних ученика.

Задатак: Парни и непарни елементи

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Филтрирање библиотечким функцијама

Филтрирање је могуће остварити и помоћу библиотечких функција које смо видели у задатку .

Формирамо листу улазних података, јер ћемо кроз њу проћи два пута (једном ради формирања колекције парних, а други пут непарних бројева). Та листа ће бити једина иста у овом решењу. Колекције парних и непарних бројева могу да буду генератори, а формирамо их помоћу компрехенсије. Коначно, помоћу функције `map` бројеве претварамо у ниске, а затим те ниске спајамо у једну ниску помоћу функције `join`.

```
# ucitavamo sve elemente u niz
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]
# filtriramo parne i neparne elemente
parni   = (x for x in a if x % 2 == 0)
neparni = (x for x in a if x % 2 != 0)
# ispisujemo rezultat
print(" ".join(map(str, parni)))
print(" ".join(map(str, neparni)))
```

Задатак: Избацивање елемената

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Коришћење библиотечких функција

```
# učitavam sve elemente u niz
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]

while True:                          # ponavljamo sledeći postupak
    n0 = len(a)                      #  pamtimo početnu dužinu niza
    a = [x for x in a if n0 % x != 0] #  izbacujemo sve delioce te dužine
    if n0 == len(a):                 #  ako se dužina nije promenila
        break                        #     prekidamo petlju

print(sum(a))                        # ispisujemo zbir preostalih elemenata
```

Задатак: Бројање гласова за омиљеног глумца

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Решење можемо засновати и на учитавању свих елемената у низ и примени библиотечких функција за бројање елемената. У језику Пајтон 3 можемо употребити методу `count` чији је параметар елемент који се броји.

```
x = int(input())
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]
broj_pojavljivanja = a.count(x)
print(broj_pojavljivanja)
```

Задатак: Број максималних

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Ако елементе сместимо у низ можемо употребити библиотечке функције за одређивање максимума и пребројавање. У језику Пајтон вредност максимума можемо лако одредити функцијом `max`, а број његових појављивања у листи методом `count`.

```
n = int(input())                          # broj takmicara
poeni = [int(input()) for i in range(n)] # poeni svih takmicara
maks = max(poeni)                         # maksimum poena
broj_pojavljivanja_maksimuma = poeni.count(maks) # broj pojavljivanja
print(broj_pojavljivanja_maksimuma)       # ispisujemo rezultat
```

Задатак: Различити елементи низа

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Библиотечке функције

Претрагу је могуће извршити и помоћу библиотечке функције.

```
# unos elemenata u listu
def unos_niza():
    n = int(input())
    a = [int(input()) for i in range(n)]
    return (a, n)

# ispisuje prvih n elemenata liste a
def ispis_niza(a, n):
    for i in range(n):
        print(a[i])

(a, n) = unos_niza()  # učitavamo dužinu i elemente niza

k = 0  # dužina početnog dela niza u koji se smešta rezultat
# sve elemente koji ne pripadaju početnom delu prebacujemo na kraj tog
# početnog dela
for i in range(n):
    if not(a[i] in a[0:k]):
        a[k] = a[i]
        k += 1
n = k  # dužina skraćenog niza

# ispisujemo konačni rezultat
ispis_niza(a, n)
```

Задатак: Први и последњи приступ

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Уместо да тражимо први или последњи елемент који задовољава неки услов, тражимо прво или последње појављивање датог елемента у низу. У тој варијанти можемо у два посебна низа сместити бројеве рачунара са којих су се ђаци логовали и имена ученика који су се логовали. У првом низу проналазимо прву тј. последњу позицију на којој се јавља број рачунара који нас занима а онда из другог низа са тих позиција читамо имена ученика и исписујемо их.

Друга могућност је да чувамо један низ парова или структура, а да онда претрагу поново вршимо на основу услова, а не на основу вредности.

```
x = int(input())  # broj racunara koji nas zanima
n = int(input())  # ukupan broj logovanja

# ucitavamo podatke o logovanjima
imena = []
racunari = []
for i in range(n):
    s = input().split()
    racunari.append(int(s[0])); imena.append(s[1])

try:
    # prvo pojavljivanje racunara x u spisku racunara
    prvo = racunari.index(x)
    # poslednje pojavljivanje racunara x u spisku racunara
    # odredjujemo preko prvog pojavljivanja u obrnutom spisku racunara
    poslednje = n - 1 - racunari[::-1].index(x)
    print(imena[prvo])
    print(imena[poslednje])
except:
    # ako je spisak racunara prazan, index baca izuzetak
    print("nema")
```

Задатак: Негативан број

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

У језику Пајтон можемо употребити функцију `any` у комбинацији са пресликавањем у логичке вредности (било функцијом `map`, било компрехенсијом), тако да негативне елементе сликамо у `True`, а ненегативне у `False`. Функција `any` проверава да ли у датој колекцији логичких вредности постоји бар једна вредност `True` (слично, функција `all` проверава да ли су све вредности једнаке `True`).

```
n = int(input())
a = (int(input()) for i in range(n))
if any((x for x in a if x < 0)):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Задатак: Дељив бројевима од 1 до n

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Библиотечке функције

У језику Пајтон функцијом `all` можемо испитати да ли су све вредности у колекцији логичких вредности једнаке `True`. Ту колекцију можемо добити тако што компрехенсијом колекцију могућих делилаца од 1 до n (коју градимо функцијом `range`) пресликавамо у `True` ако и само текући делилац дели број k.

```
k = int(input()); n = int(input())
if all(k % d == 0 for d in range(1, n+1)):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Задатак: Парно непарни

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Ако претпоставимо да су сви бројеви смештени у низ тада задатак веома елегантно можемо решити и библиотечким функцијама заснованим на линеарној претрази. У језику Пајтон префикс елемената низа можемо елиминисати функцијом `dropwhile` из модула `itertools`. Њој се прослеђује функција која проверава услов за избацивање елемената и колекција из које се елементи избацују. Ми ћемо навести анонимну (ламбда) функцију која проверава да ли је елемент паран. Након тога ћемо функцијом `all` проверити да ли су сви преостали елементи непарни (њој ћемо проследити анонимну функцију која проверава да ли је дати елемент непаран).

Од улазних података је могао бити формиран и генератор уместо листе. У том случају би се могло догодити да програм испише одговор и заврши са радом и пре него што прочита све податке.

```
import sys
from itertools import dropwhile
a = [int(line) for line in sys.stdin]
OK = all(x % 2 != 0 for x in dropwhile(lambda x: x % 2 == 0, a))
print("da" if OK else "ne")
```

Задатак: Ниска палиндром

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Библиотечке функције

Краћи кôд (али не обавезно и ефикасно решење) могуће је постићи применом библиотечких функција.

Једна идеја је да се примети да је ниска палиндром ако и само ако је једнака низу који се добија њеним обртањем. Помоћу функције `reversed` добијамо колекцију са елементима полазне колекције (карактерима учитане ниске) у обрнутом редолседу. Применом `"".join` на ту колекцију, добијамо обрнуту ниску.

```
s = input()
if s == "".join(reversed(s)):
    print("da")
else:
    print("ne")
```

Једна оптимизација овог приступа је да се примети да није потребно поредити целу ниску, већ само проверити да ли је њена прва половина једнака обратној другој половини (при чему се у случају непарног броја карактера средишњи карактер не урачунава ни у једну од две половине).

```
s = input()
n = len(s)
```

```
if s[0:n//2] == s[n-n//2:][::-1]:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Обртање ниске на начин које смо приказали узрокује изградњу нове ниске у меморији, што је меморијски непотребно захтевно и тиме су претходна решења заснована на библиотечкој функционалности неефикаснија него она ручно имплементирана.

```
s = input()
if s == s[::-1]:
    print(”da”)
else:
    print(”ne”)
```

Наравно, још је боље проверу једнакости секвенци применити на половине ниске.

Задатак: Обртање низа

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Коришћење библиотечких функција и колекција

У Пајтону за обртање колекције на располагању имамо функцију `reversed`. Ова функција прихвата једну колекцију као параметар, а враћа колекцију са елементима у обрнутом редоследу. Наредбом `a[p:q+1] = reversed(a[p:q+1])` мења се редослед података у оригиналном низу (сегмент се замењује обрнутим сегментом).

```
# unos elemenata niza
def unos_niza():
    n = int(input())
    return [int(input()) for i in range(n)]

# ispis elemenata niza
def ispis_niza(a):
    for x in a:
        print(x)

# obrtanje dela niza izmedju pozicija p i q (ukljucujuci i njih)
def obrni(a, p, q):
    a[p:q+1] = reversed(a[p:q+1])

# učitavamo niz
a = unos_niza()
while True:
    # učitavamo interval [p, q] koji treba obrnuti
    (p, q) = map(int, input().split())
    # ako je interval prazan, prekidamo postupak
    if p > q:
        break;
    # obrćemo deo niza u intervalu pozicija [p, q]
    obrni(a, p, q)
# ispisujemo rezultat
ispisNiza(a)
```

6.1.6 Сортирање

Сортирање података један је од најпроучаванијих проблема у рачунарству. С обзиром на огромне примене сортирања њему ће посебна пажња бити посвећена у другом тому ове збирке.

Задатак: Сортирање бројева

Напиши програм који уређује (сортира) низ бројева неопадајуће (сваки наредни мора да буде већи или једнак од претходног).

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 5 \cdot 10^4$) а затим и n природних бројева мањих од $2n$, сваки у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати учитане бројеве у сортираном редоследу.

Пример

Улаз	*Излаз*
5	1
3	1
1	3
6	6
8	8
1	

Решење

Сортирање селекцијом (SelectionSort)

Алгоритам сортирања селекцијом (*SelectionSort*) низ сортира тако што се у првом кораку најмањи елемент доводи на прво место, у наредном кораку се најмањи од преосталих елемената доводи на друго место и тако редом док се низ не сортира.

Најједноставнији начин да се алгоритам реализује је да се у спољној петљи разматрају редом позиције i у низу од прве до претпоследње, да се у унутрашњој петљи разматрају све позиције j од $i+1$ па до последње и да се у телу унутрашње петље размењују елементи на позицији i и j, ако су тренутно у наопаком редоследу.

У најгорем случају и број поређења и број размена је $O(n^2)$.

```
def selection_sort(a):
    # na svaku poziciju i dovodimo najmanji element iz dela niza na
    # pozicijama [i, n)
    for i in range(len(a)):
        for j in range(i+1, len(a)):
            if a[i] > a[j]:
                # razmenjujemo element na poziciji i sa minimumom
                a[i], a[j] = a[j], a[i]

# ucitavanje brojeva
n = int(input())
brojevi = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
selection_sort(brojevi)
# ispis rezultata
for x in brojevi:
    print(x)
```

Бољи начин имплементације је да се за сваку позицију i прво пронађе позиција најмањег елемента у делу низа од позиције i до краја, и да се онда елемент на позицији i размени са пронађеним минимумом (тиме се број размена значајно смањује). Позицију најмањег елемента проналазимо на исти начин као у задатку Редни број максимума.

Нагласимо да је чак и са овом бољом имплементацијом овај алгоритам прилично неефикасан и није га пожељно примењивати осим у случају релативно кратких низова (мада се и они сортирају једноставније библиотечком функцијом).

Алгоритам врши увек $O(n)$ размена и $O(n^2)$ поређења, па је сложеност квадратна.

```
def selection_sort(a):
    # na svaku poziciju i dovodimo najmanji element iz dela niza na
    # pozicijama [i, n)
    for i in range(len(a)):
```

```
        # pozicija najmanjeg elementa u delu [i, n)
        pmin = i
        for j in range(i+1, len(a)):
            # ako je element na poziciji j manji od elementa na poziciji
            # pmin, nasli smo novi minimum, pa azuriramo vrednost pmin
            if a[pmin] > a[j]:
                pmin = j
        # razmenjujemo element na poziciji i sa minimumom
        a[i], a[pmin] = a[pmin], a[i]


# ucitavanje brojeva
n = int(input())
brojevi = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
selection_sort(brojevi)
# ispis rezultata
for x in brojevi:
    print(x)
```

Сортирањем уметањем (InsertionSort)

Алгоритам сортирања уметањем (*InsertionSort*) заснива се на томе да се сваки наредни елемент у низу умеће на своје место у сортираном префиксу низа испред њега.

Најједоставнија имплементација је таква да се у спољној петљи разматрају све позиције од друге, па до краја низа и да се уметање врши тако што се сваки елемент размењује са елементима испред себе, све док се испред њега не појави елемент који није мањи од њега или док елемент не стигне на почетак низа.

У најгорем случају је и број поређења и број размена квадратни тј. $O(n^2)$.

```
def insertion_sort(a):
    # element sa pozicije i umecemo u vec sortirani prefiks na
    # pozicijama [0, i)
    for i in range(1, len(a)):
        # dok je element na poziciji j manji od njemu prethodnog
        # razmenjujemo ih
        j = i
        while j > 0 and a[j] < a[j-1]:
            a[j], a[j-1] = a[j-1], a[j]
            j -= 1

# ucitavanje brojeva
n = int(input())
brojevi = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
insertion_sort(brojevi)
# ispis rezultata
for x in brojevi:
    print(x)
```

У бољој имплементацији избегавају се размене током уметања. Елемент који се умеће се памти у привременој променљивој, затим се сви елементи мањи од њега померају за једно место удесно и на крају се запамћени елемент уписује на своје место.

У овом алгоритму се не врше размене, него појединачне доделе. Размена захтева три доделе, па се овом оптимизацијом фаза довођења елемента на своје место може убрзати око три пута. Међутим, у најгорем случају је и број поређења и број додела квадратни тј. $O(n^2)$.

```
def insertion_sort(a):
    # element sa pozicije i umecemo u vec sortirani prefiks na
    # pozicijama [0, i)
```

```
    for i in range(1, len(a)):
        tmp = a[i]
        j = i - 1
        while j >= 0 and a[j] > tmp:
            a[j+1] = a[j]
            j -= 1
        a[j+1] = tmp

# ucitavanje brojeva
n = int(input())
brojevi = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
insertion_sort(brojevi)
# ispis rezultata
for x in brojevi:
    print(x)
```

```
# ucitavanje brojeva
n = int(input())
brojevi = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
brojevi = sorted(brojevi)
# ispis rezultata
for broj in brojevi:
    print(broj)
```

```
# ucitavanje brojeva
n = int(input())
a = [int(input()) for i in range(n)]
# sortiranje
a.sort()
# ispis rezultata
for x in a:
    print(x)
```

Задатак: Просек скокова

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Сортирање

Још једно решење може бити засновано на учитавању свих оцена у низ и сортирању тако формираног низа. Пошто се не зна унапред колико ће елемената бити учитано, морамо користити неки облик динамичког низа. Сортирање је најбоље извршити коришћењем библиотечке функције, како је показано у задатку Сортирање бројева.

Ово решење може бити интуитивније, али је јасно да је неефикасније, јер се време губи успостављајући међусобни однос свих елемената у средишњем делу низа, што је потпуно непотребно.

```
import sys

# ucitavamo sve ocene
ocene = [int(linija) for linija in sys.stdin]
# sortiramo ocene
ocene = sorted(ocene)
# izracunavamo zbir ocena bez najmanje i najvece
zbir = sum(ocene[1:len(ocene)-1])
# izracunavamo i ispisujemo prosek
```

```
prosek = zbir / (len(ocene) - 2)
print(format(prosek, '.2f'))
```

Задатак: Сортирање такмичара

Дат је низ такмичара, за сваког такмичара познато је његово име и број поена на такмичењу. Написати програм којим се сортира низ такмичара нерастуће по броју поена, а ако два такмичара имају исти број поена, онда их уредити по имену у неопадајућем поретку.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($n \leq 50000$). У следећих n линија налазе се редом елементи низа. За сваког такмичара, у једној линији, налази се одвојени једним бланко симболом, његово име (дужине највише 20 карактера) и број поена (природан број из интервала $[0, 10000]$) које је такмичар освојио.

Излаз: На стандардни излаз исписати елементе уређеног низа такмичара, за сваког такмичара у једној линији приказати његово име и број поена, одвојени једним бланко симболом.

Пример

Улаз	*Излаз*
`5`	`Milica 89`
`Maja 56`	`Jovan 78`
`Marko 78`	`Marko 78`
`Krsto 23`	`Maja 56`
`Jovan 78`	`Krsto 23`
`Milica 89`	

Решење

Прво питање које је потребно разрешити је како чувати податке о такмичарима. Најприродније решење да се подаци о такмичару памте у структури `Takmicar` чији су елементи име такмичара (податак типа `string`) и број поена (податак типа `int`). За чување информација о свим такмичарима можемо онда употребити неку колекцију структура. Друге могућности су да се подаци чувају у два низа (низу имена и низу поена) или да се уместо структура користе парови тј. торке.

Сортирање је могуће извршити на разне начине (види задатак Сортирање бројева).

Сортирање селекцијом

Један од начина је да се ручно имплементира неки алгоритам сортирања (као пример, наводимо најједноставнију имплементацију алгоритма SelectionSort), међутим то је обично веома компликовано и неефикасно.

Сложеност сортирања селекцијом је $O(n^2)$.

Библиотечка функција сортирања

Најбољи и уједно и најједноставнији начин је употребити библиотечку функцију сортирања.

Све варијанте коришћења библиотечке функције у којој се поређење и размештање два елемента може извршити у константној сложености су квази-линеарне сложености $O(n \log n)$.

Функцији сортирања је потребно доставити и функцију поређења којом се заправо одређује редослед елемената након сортирања. Тело те функције поређења врши вишекритеријумско (лексикографско) поређење уређених двојки података, слично оном које смо видели у задатку Пунолетство. Прво се пореди број поена и ако је број поена првог такмичара мањи функција поређења враћа `false` (јер он треба да иде иза другог такмичара), ако је већи враћа се `true` (јер он треба да иде испред другог такмичара), а ако су бројеви поена једнаки, прелази се на поређење имена. За то се може упоредити библиотечко абецедно (лексикографско) поређење ниски (слично као у задатку Лексикографски минимум).

Коришћење парова или торки

Рецимо и да се за репрезентацију података могу користити парови тј. торке (слично као у задатку Пунолетство). Пошто се парови тј. торке подразумевано пореде лексикографски (прво прва компонента, а тек ако је прва компонента једнака, онда друга) и неопадајуће, функцију поређења није неопходно наводити. Зато је паметно парове организовати тако да се као прва компонента памти супротан број од броја освојених поена (да би се добио опадајући редослед броја поена), а као друга име такмичара.

Задатак: Највреднији предмети

За сваки предмет који је на продају дата је шифра и цена. Купац има на располагању одређени износ динара и жели да купи што скупље предмете. Редом узима предмете почев од најскупљег, док има новца. Ако нема новца за најскупљи, узима најскупљи за који има новца. Приказати шифре предмета које купац купује и, ако му је остало, преостали износ новца. Напомена: ова стратегија не гарантује да ће предмети које купи бити укупно највеће могуће вредности (нпр. ако има 5 динара и ако су цене предмета 4, 3 и 2 динара, он ће купити предмет само предмет од 4 динара, а могао би да купи предмете од 3 и 2 динара).

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се износ новца (реалан број) који има купац, у другој број предмета, N, а затим се, у сваке две линије стандардног улаза, уносе, редом, шифра (ниска карактера) па цена (реалан број) предмета, свака у посебном реду, за свих N предмета.

Излаз: У свакој линији стандарног излаза исписују се шифре и цене купљених предмета (раздвојене размаком), ако их има. У последњој линији приказује се преостали износ новца, ако постоји.

Пример1

Улаз
```
1250.75
5
predmet1
1010.30
predmet2
357.35
predmet3
725.45
predmet4
1125.5
predmet5
115.75
```

Излаз
```
predmet4 1125.5
predmet5 115.75
9.50
```

Пример2

Улаз
```
10000
6
predmet1
3010
predmet2
3005
predmet3
5725
predmet4
1265
predmet5
2075
predmet6
385
```

Излаз
```
predmet3 5725.00
predmet1 3010.00
predmet4 1265.00
```

Решење

Предмете можемо сортирати по цени у нерастући поредак а затим их анализирати редом, од најскупљег до најјефтинијег. Податке о предмету (шифру и цену) можемо чувати у структури. За сортирање можемо употребити библиотечку функцију којој је потребно на неки начин проследити и функцију поређења две структуре. Начини на које је то могуће урадити описани су, на пример, у задатку Сортирање такмичара.

Након сортирања одређујемо предмете који ће се купити, обилазећи редом предмете од најскупљег до најјефтинијег. Ако је текући предмет скупљи од износа којим располаже купац, прескаче се, а иначе га купац купује па његову шифру и цену исписујемо. При томе смањујемо и износ којим располаже купац. Поступак понављамо док купац не потроши цео износ или док не пређемо све предмете. Ако је купцу преостало новца, на крају исписујемо и износ којим располаже.

Задатак: Сортирање на основи растојања од О

Пера је проучавао градове које жели да посети. На мапи је нацртао координатни систем у којем се његов град налази у координатном почетку, а остали градови су одређени њиховим Декартовим координатама. Написати програм којим се низ градова сортира у неопадајућем пореку на основу удаљености од Периног града (од најближег до најдаљег). Ако су два града подједнако удаљена од Периног, уредити их у нерастућем поретку прво по координати x па по координати y.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се број градова, природан број n ($n \leq 50000$). У следећих n линија налазе се елементи низа: у свакој линији, налазе се, x и y координата једног града (два цела броја из интервала $[-10^3, 10^3]$ одвојена једним размаком).

Излаз: Стандардни излаз садржи елементе уређеног низа градова - за сваки град у једној линији приказати редом, његову координату x и y, раздвојене размаком.

Пример

Улаз	*Излаз*
`4`	`1 -1`
`8 2`	`-2 -3`
`1 -1`	`2 -3`
`2 -3`	`8 2`
`-2 -3`	

6.2 Карактери и ниске

6.2.1 Елементи програмског језика

Опишимо мало детаљније како се могу представити подаци текстуалног типа у програму. Текст се представља у облику *ниске* (engl. string) која се састоји од карактера.

Основни тип података за представљање текста тј. ниски у језику Пајтон је `str` (скраћено од `string`). На пример, функција `input` која учитава целу линију текста враћа податак типа `str`. Константне ниске наводе се између једноструких или двоструких наводника, на пример, `”zdravo”` или `'zdravo'`. Пошто језик Пајтон подржава скуп карактера Unicode, ниске могу да садрже и све наше латиничне и ћириличне карактере.

Подаци типа `str`, односно ниске имају двојако тумачење. Са једне стране можемо их сматрати елементарним, атомичним подацима, а са друге стране ниске имају многе особине колекција.

Већ смо видели да се, веома слично као бројеви, подаци типа `string` се могу “сабирати” тј. надовезивати коришћењем оператора `+` и поредити релацијским операторима `<`, `<=`, `>`, `>=`, `==`, `!=`. По овим особинама ниске наликују атомичним подацима. Тип `str` подржава и бројне библиотечке методе, од којих нам неке додатно омогућвају да ниске третирамо као атомичне податке. Такве су, на пример, методе које смо већ помињали у уводу у поглавље о карактерима. Нека је `s` ниска. Тада:

- `s.isdigit()` — враћа логичку вредност, одговара на питање да ли су сви какрактери дате ниске `s` цифре.
- `s.islower()`, `s.isupper()`, — враћају логичку вредност, одговарају на питање да ли су сва слова дате ниске `s` мала, односно велика.
- `s.upper()` – враћа ниску која се од полазне ниске добија када се сва мала слова замене одговарајућим великим, а остали карактери се препишу. При томе се полазна ниска не мења.
- `s.lower()` – враћа ниску која се од полазне ниске добија када се сва велика слова замене одговарајућим малим, а остали карактери се препишу. При томе се полазна ниска не мења.

Методе `strip`, `rstrip` и `lstrip` су такође врло корисне, нарочито када учитавамо податке до краја улаза (пролазећи кроз колекцију `sys.stdin`). У том случају прочитана ниска може на крају да садржи карактер који означава прелазак у нови ред. Тог карактера и других белина (размак, таб карактер) се ослобађамо помоћу ових функција:

- `s.rstrip()` – враћа ниску која се од полазне ниске `s` добија када се карактери белине (нови ред, таб, размак) уклоне са њеног краја.
- `s.lstrip()` – враћа ниску која се од полазне ниске `s` добија када се карактери белине (нови ред, таб, размак) уклоне са њеног почетка.
- `s.strip()` – враћа ниску која се од полазне ниске `s` добија када се карактери белине (нови ред, таб, размак) уклоне са и њеног почетка и са краја.

Метода `s.find(c)` је негде на пола пута ка нискама као колекцијама. Она тражи карактер или подниску `c` у датој ниски и враћа позицију првог појављивања или вредност -1, ако тражени карактер или подниска не постоје у ниски. Метода `rfind` је веома слична, али враћа позицију последњег појављивања.

Постоје и бројни начини употребе ниски по којима оне наликују на листе:

- функција `len(s)`, која одређује дужину ниске `s`.
- Индекси за приступ појединим карактерима или деловима ниске се користе на исти начин као код листи (на пример `s[i]`, или `s[i:j]`, при чему се индекси броје од нуле).
- Слично као и код листи, итерацију кроз све карактере ниске можемо извршити помоћу петље `for`.

Ипак, постоји једна веома важна разлика између листи и ниски – подаци типа `str` (ниске) се не могу мењати (кажемо да су ниске *имутабилне*). Имутабилност има озбиљне последице на ефикасност, јер у неким ситуа-

цијама програми због тога могу бити бржи, а некада могу бити прилично спорији. На пример, сабирање две ниске обавезно проузрокује креирање треће ниске и копирање садржаја сабирака у резултат, што је прилично неефикасно, нарочито ако се често понавља у програму. Зато уместо података типа `str` у неким ситуацијама за рад са текстом треба да користимо друге типове података, на пример листу у којој је сваки елемент ниска дужине 1.

Податак `s` типа `str` се једноставно конвертује у листу `a` ниски које садрже појединачне карактере наредбом `a = list(s)`, док се листа карактера може конвертовати у ниску наредбом `s = ''.join(a)` (обратимо пажњу да се у оба случаја алоцира нова меморија и да ове конверзије трају одређено време).

У ситуацијама када се врши често надовезивање велике количине текста или често брисање и замена делова текста, уместо типа `str` боље је користити листу. Уклањање елемената листе `a` може се вршити помоћу `del` (на пример, del a[2] уклања елемент чији је индекс 2).

6.2.2 Подниске

Задатак: Презиме па име

Ученици који су заинтересовани на такмичењу су направили списак у електронском облику, али су на том списку увек писали прво име, па онда презиме. Међутим, електронски систем пријављивања захтева да се унесе прво презиме, па онда име. Напиши програм који поправља списак у складу са тим захтевом.

Улаз: Свака линија стандардног улаза, све до његовог краја, садржи име и презиме ученика (која су откуцана само коришћењем слова енглеске абецеде), раздвојене са тачно једним размаком. Напомена: при интерактивном тестирању крај улаза се може унети тастерима `ctrl+z` (`Windows`) тј. `ctrl+d` (`Unix/Linux`).

Излаз: На стандардни излаз исписати презимена и имена свих учитаних ученика раздвојене са по једним размаком, у истом редоследу у којем су учитани.

Пример

Улаз	*Излаз*
`Petar Petrovic`	`Petrovic Petar`
`Ana Anic`	`Anic Ana`
`Jelena Jelenkovic`	`Jelenkovic Jelena`
`Mika Mikic`	`Mikic Mika`

Решење

Потребно је читати линију по линију текста све док се не дође до краја улаза. Поступак је сличан ономе у задатку Читање до краја улаза. У језику Пајтон читање свих линија можемо једноставно остварити помоћу

```
import sys
for str in sys.stdin:
    ...
```

Када имамо учитану линију са именом и презименом (рецимо да је резултат смештен у промењљивој `ime_i_prezime`), потребно је да из ње издвојимо име и презиме (који су раздвојени размаком).

Један од начина да извршимо поделу је да се прво пронађе позиција размака, а онда да се издвоје делови ниске до позиције размака и после ње. Када се издвоје име и презиме, резултат се може лако добити (тако што се испише прво презиме, затим један размак и на крају име).

```
import sys

for ime_i_prezime in sys.stdin:
   ime_i_prezime = ime_i_prezime.rstrip()
   razmak = ime_i_prezime.find(" ")
   ime = ime_i_prezime[0:razmak]
   prezime = ime_i_prezime[razmak+1:]
   print(prezime, ime)
```

Задатак се још лакше може делити ако у библиотеци језика постоји функција која дели ниску на делове на основу неког сепаратора и враћа низ ниски. У језику Пајтон може да се употреби функција `split()`. У том низу ће име бити на позицији 0, а презиме на позицији 1. Када се идвоје име и презиме, резултат се може лако добити (тако што се испише прво презиме, затим један размак и на крају име).

```
import sys

for ime_i_prezime in sys.stdin:
   (ime, prezime) = ime_i_prezime.split()
   print(prezime, ime)
```

Задатак: Све подречи

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Када је фиксиран сегмент $[i, j]$ подреч можемо издвојити и коришћењем библиотечке подршке за рад са нискама. У Пајтону можемо да користимо нотацију `s[i:j]` за издвајање подречи ниске `s` од позиције `i` до позиције `j`, не рачунајући `j`.

```
s = input()
for i in range(len(s)):
    for j in range(i, len(s)):
        print(s[i:j+1])
```

Задатак: Подниска

Написати програм којим се за две дате речи проверава да ли је друга садржана у првој, ако јесте одредити прву позицију на којој се друга реч појављује у првој.

Улаз: На стандардном улазу налазе се две речи свака у посебној линији. Свака реч има највише 20 карактера.

Излаз: На стандарном излазу приказати прву позицију (позиције су нумерисане од 0) на којој се налази друга реч у првој, ако се друга реч не налази у првој приказати -1.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`banana`	`1`
`ana`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`branka`	`-1`
`ana`	

Решење

Библиотечке функције претраге

Када смо речи у језику Пајтон учитали у две ниске (назовимо их `igla` и `plast`, јер је тако одмах јасно шта у чему тражимо) онда позицију првог појављивања речи `igla` у речи `plast` можемо одредити помоћу `plast.find(igla)`. Ако реч `plast` не садржи реч `igla` онда `find` враћа вредност `-1`.

```
plast = input()
igla = input()
print(plast.find(igla))
```

Имплементација претраге грубом силом

Осим коришћења библиотечких функција, решење је било могуће испрограмирати и "пешке" тако што ћемо дефинисати своју функцију претраге. Наравно, у реалној ситуацији је увек боље употребити библиотечке функције јер се кôд једноставније пише, мања је могућност грешке, а алгоритми на којима су засноване библиотечке функције су често напреднији од наивних алгоритама на којима се "пешке" решења понекад заснивају, какво је и ово које ћемо описати у наставку.

Размотримо, на пример, како бисмо у речи `ababcab` тражили реч `abc`.

- Прво можемо проверити да ли се реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 0. То радимо тако што поредимо редимо слова речи `abc` и слова речи `ababcab` почевши од позиције 0, све док не пронађемо различито слово или док не дођемо до краја речи `abc` а не пронађемо разлику. У овом примеру разлика ће бити пронађена на позицији 2 (слова `a` на позицији 0 и `b` на позицији 1 ће бити једнака, а онда ће се слово `c` разликовати од слова `a`). Пошто смо нашли разлику пре него што смо стигли до краја речи `abc`.

- Настављамо претрагу тако што проверавамо да ли се можда реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 1. Овај пут поредимо слово на позицији 0 у речи `abc` са словом на позицији 1 у речи `ababcab` и одмах наилазимо на разлику, јер `a` није једнако `b`.
- Након тога претрагу настављамо тако што проверавамо да ли се реч `abc` налази у речи `ababcab` почевши од позиције 2. Тада поредимо слово `a` на позицији 0 у речи `abc`, са словом `a` на позицији 2 у речи `ababcab`, слово `b` на позицији 1 у речи `abc`, са словом `b` на позицији 3 у речи `ababcab` и слово `c` на позицији 2 у речи `abc`, са словом `c` на позицији 4 у речи `ababcab` и пошто не наилазимо на разлику, констатујемо да је подреч пронађена.

Ако бисмо, на пример, тражили реч `cba` у речи `ababcab` тада бисмо по истом принципу кренули да је тражимо од позиције 0, затим 1 итд. Када реч `cba` не пронађемо ни тако да почиње од позиције 4 речи `ababcab` (јер `cab` није исто што и `cba`) нема потребе да тражимо даље, јер иза позиције 4 нема довољно карактера да би се реч `abc` пронашла.

Дакле, за сваку позицију i у речи `plast`, од позиције 0, па док важи да је збир позиције i и дужине речи `igla` мањи или једнак дужини речи `plast` проверавамо да ли се реч `igla` налази у речи `plast` почевши од позиције i. То радимо тако што спроводимо алгоритам линеарне претраге који редом, за сваку позицију j у речи `igla` проверава да ли је слово у речи `igla` на тој позицији различито од слова на позицији $i + j$ у речи `plast`. Алгоритам претраге имплементирамо на неки од начина који смо приказали у задатку Негативан број. На пример, у петљи увећавамо j од нуле, па све док је j мање од дужине речи `igla` и док важи да су слова у речи `igla` на позицији j и речи `plast` на позицији $i + j$ једнака. Када се петља заврши, проверавамо зашто је прекинута. Ако утврдимо да је вредност j једнака дужини речи `igla`, можемо констатовати да разлика није пронађена, да се прво појављивање речи `igla` у речи `plast` налази на позицији i и функција може да врати резултат i (прекидајући тиме спољашњу петљу). У супротном је пронађено различито слово, и наставља се са извршавањем спољашње петље (i се увећава, и подниска се тражи од следеће позиције, ако евентуално није достигнут услов за завршетак спољашње петље).

Још један начин да имплементирамо претрагу је да уведемо логичку променљиву која бележи да ли је разлика пронађена и коју иницијализујемо на `false`. У сваком кораку унутрашње петље (петље по j) проверавамо да ли је су слова у речи `igla` на позицији j и речи `plast` на позицији $i + j$ једнака. Ако нису, логичкој променљивој постављамо вредност `true` и прекидамо унутрашњу петљу. Након унутрашње петље проверавамо да ли је вредност логичке променљиве остала `false` и ако јесте, функција може да врати вредност i.

```
# Trazimo "iglu u plastu" tj. trazimo poziciju u reci plast na kojoj
# se nalazi rec igla. Ako takva pozicija ne postoji, funkcija vraca -1
def podniska(igla, plast):
    for i in range(len(plast) - len(igla) + 1):
        # proveravamo da li se rec igla nalazi u reci plast pocevsi od
        # pozicije i
        razliciti = False
        for j in range(len(igla)):
            # proveravamo da li je j-to slovo reci igla razlicito od
            # j-tog slova reci plast krenuvsi od pozicije i
            if plast[i+j] != igla[j]:
                razliciti = True
        # ako smo dosli do kraja reci igla, nasli smo njeno
        # pojavljivanje
        if not razliciti:
            return i
    # nismo nasli rec igla i vracamo -1
    return -1

plast = input()
igla = input()
print(podniska(igla, plast))
```

Задатак: Подниске

Напиши програм који одређује колико пута се дата ниска јавља као подниска друге дате ниске. Више појављивања подниске се могу преклапати.

Улаз: Са стандардног улаза се уносе две ниске, свака у посебном реду. Прва ниска има највише 10 карактера, а друга највише 1000.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број појављивања.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`aba`	`4`	`aa`	`3`
`abababcababac`		`aaaa`	

Решење

Претрага од сваке позиције

Директан алгоритам да се овај задатак реши је да се покуша претрага подниске од сваке позиције кренувши од нулте, па до оне позиције на којој се десни крај ниске поклапа са десним крајем подниске. Обилазак позиција, дакле, тече све док је збир текуће позиције и дужине подниске мањи или једнак од дужине ниске. За сваку такву позицију проверавамо да ли на њој почиње подниска и ако почиње, увећавамо бројач иницијално постављен на нулу.

Проверу да ли се подниска налази у датој ниски кренувши од дате позиције можемо урадити на разне начине. Један начин је да издвојимо део ниске од дате позиције помоћу индексирања облика `s[a:b]` и да га упоредимо са датом подниском помоћу оператора `==`.

```
podniska = input()
niska = input()
broj_pojavljivanja = 0
for p in range(len(niska) - len(podniska) + 1):
    if podniska == niska[p:p+len(podniska)]:
        broj_pojavljivanja += 1
print(broj_pojavljivanja)
```

Библиотечка претрага подниске

Библиотечка функција за претрагу подниске обично има додатни параметар којим се контролише позиција од које претрага треба да крене. Сваки пут када се пронађе подниска, увећава се бројач, а нова претрага креће од позиције непосредно иза позиције где је подниска пронађена.

Рецимо да би се пажљивом анализом ниске која се тражи то могло оптимизовати. На пример, ако смо нашли ниску `abcacbabc` унутар шире ниске, ново појављивање те подниске не треба тражити од наредне позиције (позиције првог карактера `b`), већ од треће позиције на којој се појављује карактер `a` (то је најдужи суфикс који је уједно и префикс ниске која се тражи). Ово је основа алгоритма КМП о ком ће бити више речи у наредном тому ове збирке.

```
podniska = input()
niska = input()
broj_pojavljivanja = 0
p = niska.find(podniska)
while p != -1:
       broj_pojavljivanja += 1
       p = niska.find(podniska, p + 1)
print(broj_pojavljivanja)
```

Задатак: Реч Франкенштајн

Напиши програм који од унете речи прави нову реч састављену из делова почетне речи. На пример, за унето

```
dabrakabmra
6 2
3 3
1 1
0 3
9 2
```

програм гради и исписује реч `abrakadabra` (прво иду 2 карактера кренувши од позиције 6 тј. `ab`, затим 3 карактера од позиције 3 тј. `rak`, затим 1 карактер од позиције 1 тј. `a`, затим три карактера од позиције 0 тј. `dab` и на крају два карактера од позиције 9 тј. `ra`).

Улаз: У првој линији стандардног улаза је ниска који представља дату реч (дужине највише 50000 карактера) и која садржи само слова енглеске абецеде. У наредним линијама (њих највише 10000) се уносе парови: позиција у датој ниски и дужина подниске (позиција и дужина исправно задају подниску).

Излаз: Реч која се добија наведеним поступком.

Пример

Улаз	*Излаз*

`maranaakkabbikopa`
`13 3`
`16 1`
`8 3`
`3 3`
	`kopakabana`

Решење

Реч Франкенштајн која се тражи добија се лепљењем мањих делова оригиналне ниске, учитане из прве линије текста. Учитавање једне линије у језику Пајтон вршимо функцијом `input`.

Након тога у петљи учитавамо позицију и број карактера сваког дела, све док не дођемо до краја улаза. То радимо на начин веома сличан оном описаном у задатку Читање до краја улаза. За учитану позицију и дужину, део оригиналне ниске (подниску) издвајамо на начин који смо већ срели у задатку Презиме па име. У језику Пајтон користимо методу користимо индексирање облика `s[a:b]`, којим се, подсетимо се, из ниске `s` издвајају сви карактери на позицијама између `a` и `b` (укључујући `a`, али не и `b`).

Сваки издвојени део лепимо на ниску у којој се чува до сада формирани део решења. Њу на почетку, пре петље, иницијализујемо на празну ниску, а онда јој у телу петље, на крај, дописујемо део који смо управо одредили. Дописивање на десну страну ниске можемо вршити оператором `+=`. Приметимо велику сличност изградње ниске на овај начин са алгоритмом сабирања серије бројева описаним у задатку Збир n бројева – и у овом случају добијамо решење "сабирањем" мањих делова.

```
import sys

ulaz = input()            # učitavamo polaznu reč
str_frankenstajn = ""     # rezultujuća reč
for linija in sys.stdin:  # čitamo liniju po liniju do kraja ulaza
    s = linija.split()    # čitamo poziciju i dužinu podniske
    poz = int(s[0]); n = int(s[1])
    str_frankenstajn += ulaz[poz:poz+n]  # dodajemo podnisku na rezultat
print(str_frankenstajn)   # ispisujemo konačan rezultat
```

Нажалост, у језику Пајтон свако надовезивање ниски, па и оно са `+=` производи нове ниске. Наиме, све ниске у језику Пајтон су имутабилне и не могу се никада мењати (што има многе предности, али и мане). Да би се овај проблем превазишао, боље решење је да се направи листа делова који ће се тек на крају спојити у јединствену ниску.

```
import sys

ulaz = input()              # čitamo početnu reč
delovi = []                 # lista delova koji čine rezultat
for linija in sys.stdin:    # čitamo liniju po liniju do kraja ulaza
    s = linija.split()      # čitamo poziciju i dužinu podniske
    poz = int(s[0]); n = int(s[1])
    delovi.append(ulaz[poz:poz+n])  # dodajemo podnisku u listu
str_frankenstajn = "".join(delovi)  # spajamo delove u jednu nisku
print(str_frankenstajn)             # ispisujemo konačan rezultat
```

Задатак: Избацивање подниски

Написати програм којим се одређује текст који се добија брисањем из датог текста свих појављивања подречи из датог скупа. Бришу се прво сва појављивања прве речи, затим друге, треће и тако до краја. Тај поступак се понавља све док се текст њиме мења. Приликом брисања свих појављивања речи поступак се исцрпно понавља све док је брисање могуће.

На пример, за текст `babrarkadabrabbrr` и скуп речи {`br`, `ka`, `aa`}, прво се исцрпно брише `br` и добија се `baarkadaa`, затим се брише `ka` и добија се `baardaa`, затим се брише `aa` и добија се `brd`. Након тога се креће из почетка, исцрпно се брише `br` и добија `d`, покушава се са брисањем `ka` и `aa` које не успева, пролази се кроз трећи круг у којем реч остаје иста и пријављује се резултат `d`.

Улаз: У првој линији стандардног улаза је текст, дужине највише $5 \cdot 10^5$ карактера из којег се бришу речи које се учитавају из наредних линија. Речи се учитавају до краја стандардног улаза и има их највише 10^5, а свака је дужине највише 10 карактера.

Излаз: Текст који се добија након брисања подречи које садржи.

Пример

Улаз	*Излаз*

`babrarkadabrabbrr`
`br`
`ka`
`aa`
	`d`

Решење

У главном програму учитавамо линију текста која ће се мењати, а затим и низ подниски које ће бити брисане. Пошто не знамо колико их је, сместићемо их у динамички низ. Након тога, у петљи ћемо пролазити кроз колекцију подниски, брисати једну по једну (позивом помоћне функције), чувајући, при том, у логичкој променљивој информацију да ли је дошло до неког брисања. Поступак ћемо понављати (помоћу спољашње петље) све док се не деси да се прође кроз целу колекцију подниски, а да не дође ни до једног брисања (што ћемо знати на основу вредности логичке променљиве).

Кључни елемент решења је функција која исцрпно уклања сва појављивања дате подниске из дате ниске.

Ефикасни алгоритми за проналажење мањег текста у већем (игле у пласту) имплементирани су за листе у функцијама попут `find` или `replace`. Такви алгоритми нису нам на располагању у готовом облику за листе карактера. Пошто посање таквих ефикасних алгоритама (за листе) превазилази оквире ове збирке, у решењу ћемо користити ниске, мада то због имутабилности ниски значи нешто више преписивања карактера него што је оптимално.

У функцији `obrisi` понављамо наредбу `plast = plast.replace(igla, "")` док год се тиме мења (смањује) дужина ниске `plast`. Да би се ова наредба извршила бар једном, пишемо је и испред петље. Функција враћа информацију да ли је било брисања, као и ниску `plast` након брисања. У главном програму понављамо позиве функције `obrisi` са сваку од задатих подречи (игала) док год има брисања.

Задатак: Подела линије на речи

Напиши програм који издваја све речи из учитане линије текста. Речи се састоје само од малих слова и раздвојене су по једним размаком.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава једна линија текста.

Излаз: На стандардни излаз се исписује свака реч у посебној линији (без размака).

Пример

Улаз	*Излаз*

`ko rano rani dve srece grabi`	`ko`
	`rano`
	`rani`
	`dve`
	`srece`
	`grabi`

Решење

Основно решење у Пајтону је да учитамо целу линију и да је поделимо на речи коришћењем методе `split()`.

Ово решење није нарочито ефикасно у случају веома дугачке линије текста јер се цела линија држи у меморији, али то је начин на који Пајтон ради.

```
reci = input().split()
for rec in reci:
    print(rec)
```

Ручна имплементација поделе ниске на речи

Обраду речи је могуће урадити и тако што се цела линија текста учита у једну ниску, а онда се из те ниске издваја једна по једна реч. Током тог поступка одржавамо променљиву `start` у којој се чува почетак наредне речи и коју можемо иницијализовати на нулу. Сваку наредну реч проналазимо тако што пронађемо позицију наредног размака `poz` у линији и издвојимо карактере између позиције `start` и позиције `poz` (укључујући прву, али не и другу). Након сваке издвојене речи, позиција `start` се помера на позицију `poz+1`). Последња реч је специфична по томе јер иза ње нема размака, међутим, и она се може издвојити на униформан начин као и све остале, ако се након учитавања линије на њен крај дода један размак.

За проналажење првог појављивања неког карактера (или подниске) `c` почевши од неке позиције `p` у ниски `s` у Пајтону можемо користити позив `s.find(c, p)`, који враћа индекс првог појављивања ако се `c` пронађе, односно -1 ако се `c` не пронађе. Издвајање дела ниске `s` између позиција `a` и `b` укључујући карактер на позицији `a`, а не укључујући онај на позицији `b` можемо извршити помоћу `s[a:b]`.

Издвајање речи може трајати све док се након позиције `start` може пронаћи размак или док позиција `start` не пређе дужину линије из које се речи издвајају.

Рецимо да се, ако је то потребно, прва реч може издвојити и посебно, испред петље.

```
str = input()
# linija se prosiruje prazninom da bi se sve reci
# izdvajale na uniforman nacin
str += ” ”
start = 0
# radi dok ne stignes do kraja stringa str
while start < len(str):
    # pronalazimo narednu prazninu krenuvsi od pozicije start
    pos = str.find(' ', start)
    # izdvajamo rec od pozicije start do praznine (ne ukljucujuci nju)
    tekucaRec = str[start:pos]
    print(tekucaRec)
    # startna pozicija sledece pretrage
    start = pos + 1
```

6.2.3 Поређење ниски

Задатак: Лексикографски поредак

Речи се у речницима ређају по абецеди. Напиши програм који упоређује две речи на основу тог поретка.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају две речи, свака у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати -1 ако је прва у речнику испред друге, 1 ако је друга испред прве тј. 0 ако су речи једнаке.

Пример

Улаз	*Излаз*
abcde	-1
abcefg	

Решење

Библиотечка подршка

У језику C++ лексикографско поређење ниски се добија применом уобичајених релацијских оператора `<`, `<=`, `>`, `>=` и `==`.

```
rec1 = input()
rec2 = input()
if rec1 < rec2:
    print(-1)
elif rec1 > rec2:
    print(1)
else:
    print(0)
```

Ручна имплементација лексикографског поређења

Функцију лексикографског поређења која нам је потребна можемо имплементирати и самостално. Функција ће се заснивати на алгоритму који смо, на пример, анализирали у задатку Победник у три дисциплине.

Начин да се лексикографско поређење ручно имплементира је да се пореде карактери на истим позицијама у две ниске, кренувши од почетка све док се не дође до прве разлике или краја неке од две ниске. Ако се наиђе на карактер који се разликује, може се вратити разлика између кодова та два карактера. Ако се дође до краја неке ниске, може се вратити разлика између дужина две ниске (краћа ниска је тада префикс дуже, па је по дефиницији лексикографски испред друге).

```
def poredi(s1, s2):
    for i in range(min(len(s1), len(s2))):
        if s1[i] != s2[i]:
            return ord(s1[i]) - ord(s2[i])
    return len(s1) - len(s2)

rec1 = input()
rec2 = input()
p = poredi(rec1, rec2)
if p < 0:
    print(-1)
elif p > 0:
    print(1)
else:
    print(0)
```

Задатак: Лексикографски поредак без разлике између великих и малих слова

Речи се у речницимаређају по абецеди. Напиши програм који упоређује две речи на основу тог поретка занемарујући разлику између малих и великих слова.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају две речи, свака у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати -1 ако је прва реч у речнику испред друге, 1 ако је друга испред прве тј. 0 ако су речи једнаке.

Пример

Улаз	*Излаз*
aBcdE abCEfg	-1

Решење

Поређење помоћу библиотечких функција

Задатак се може решити тако што се пре поређења обе ниске преведу у велика или мала слова.

```
rec1 = input().upper()
rec2 = input().upper()
if rec1 < rec2:
    print(-1)
elif rec2 < rec1:
    print(1)
```

```
else:
    print(0)
```

Ручна имплементација функције поређења

Функција поређења се имплементира готово на идентичан начин као у задатку Лексикографски поредак. Једина разлика је то што се пре поређења карактера они преводе у велика или мала слова (најбоље библиотечком функцијом `upper` коју смо увели у задатку Трансформација карактера).

```
def poredi(s1, s2):
    for i in range(min(len(s1), len(s2))):
        if s1[i].upper() != s2[i].upper():
            return ord(s1[i].upper()) - ord(s2[i].upper())
    return len(s1) - len(s2)


rec1 = input()
rec2 = input()

p = poredi(rec1, rec2)
if p < 0:
    print(-1)
elif p > 0:
    print(1)
else:
    print(0)
```

Задатак: Лексикографски минимум

Напиши програм који одређује која би од неколико датих речи требало да буде наведена прва у речнику ако се не прави разлика између великих и малих слова (за ту реч кажемо да је лексикографски испред осталих речи, тј. да је лексикографски најмања међу свим речима).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава линија текста која садржи више речи раздвојених са по тачно једним размаком (у линији постоји бар једна реч, а иза последње речи нема размака).

Излаз: На стандардни излаз исписати реч из учитане линије која је лексикографски испред осталих речи.

Пример

Улаз	*Излаз*
`Ko rano rani dve srece grabi`	`dve`

Решење

Задатак захтева да се одреди минимум низа учитаних речи у односу на релацију лексикографског поретка. Да би се написао тражени програм потребно је учитавати реч по реч из дате линије, поредити две речи лексикографски и пронаћи минимум серије речи у односу на лексикографски поредак.

Начини да се из линије издвоје појединачне речи описан је у задатку Подела линије на речи.

Алгоритам одређивања минимума

Одређивање најмање речи вршимо коришћењем уобичајеног алгоритма за одређивање минимума серије (који смо видели, на пример, у задатку Најнижа температура). Најмању реч иницијализујемо на прву реч коју прочитамо (она сигурно постоји, по претпоставци задатка), а затим у петљи читамо остале речи, поредимо их са минималном (коришћењем лексикографског поретка који занемарује величину слова који је приказан у задатку Лексикографски поредак без разлике између великих и малих слова) и ако је текућа реч мања од до тада минималне, ажурирамо минималну.

```
reci = input().split()
min_rec = reci[0]
for rec in reci[1:]:
    if rec.upper() < min_rec.upper():
        min_rec = rec
print(min_rec)
```

Проналажење минимума библиотечким функцијама

Минимум можемо одређивати и библиотечким функцијама.

У Пајтону функцији `min` можемо да проследимо додатни параметар `key=f`, при чему ради проналажења минимума поредимо вредности функције `f` примењене на елементе колекције, уместо да поредимо саме елементе колекције. У овом задатку као функцију `f` користићемо функцију `str.upper`.

```
reci = input().split()
min_rec = min(reci, key=str.upper)
print(min_rec)
```

6.2.4 Трансформисање ниски

Задатак: Цезаров кôд

Задата је реч састављена од малих слова римске абецеде (која је подскуп енглеске). Потребно је шифровати односно дешифровати поруку. Цезарова шифра је тип шифре замењивања у коме се свако слово текста који се шифрује мења словом абецеде које се добије померањем полазног слова за одређени број места, циклично по абецеди. На пример, ако се врши померање за три места, слово `a` би се шифровало словом `d`, `b` словом `e`, итд., док би се слово `w` шифровало словом `z`, слово `x` словом `a`, слово `y`, словом `b` и слово `z` словом `c`. На пример, реч `papagaj` би се шифровала са `sdsdjdm`.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се реч не дужа од 100 слова, у другој линији се налази цео број N, који представља помак ($1 \leq N < 26$), а у трећој цео број S који представља смер шифровања. Ако је $S = 1$ потребно је шифровати, а ако је $S = 2$ потребно је дешифровати реч.

Излаз: У првој линији стандардног излаза приказати реч која се добије након шифровања тј. дешифровања задате речи.

Пример 1

Улаз	*Излаз*

`abcdefghijklmnopqrstuvwxyz`
`3`
`1`
	`defghijklmnopqrstuvwxyzabc`

Пример 2

Улаз	*Излаз*

`twornuvkpemkp`
`2`
`2`
	`rumplstinckin`

Решење

Централна операција у решењу овог задатка је кодирање појединачног карактера. Кодирање ниске се своди на кодирање сваког њеног карактера. То је веома једноставно урадити ручно у петљи, а могуће је урадити и помоћу библиотечких функција.

Приметимо сличност са задатком Абецедно огледало у којем се такође вршило шифровање трансформацијама појединачних карактера. Основна разлика у односу на тај задатак је то што се у овом задатку померај учитава након текста, тако да је неохподно учитати цео текст пре него што се крене са његовим шифровањем, па је неопходно радити са нискама и није могуће учитавати и обрађивати један по један карактер.

Промена појединачног карактера се заснива на аритметичким операцијама над њиховим кодовима , слично као што је то приказано у задатку Абецедно огледало. Шифровање подразумева циклично померање удесно по абецеди, што подразумева увећавање кода карактера за дати померај, водећи рачуна о томе да резултат не пређе карактер `z` (ако пређе, од добијеног кода је потребно одузети 26, што је број карактера у абецеди тј. разлика између кодова слова `z` и слова `a`). Дешифровање подразумева циклично померање улево по абецеди, што подразумева умањивање кода карактера за дати померај, водећи рачуна о томе да резултат не постане мањи од кода карактера `a` (ако се то догоди, на добијени кôд је потребно додати 26).

```
rec = input()
pomeraj = int(input())
smer = int(input())

rez_slova = []
```

```
if smer == 1: # sifrovanje
    for c in rec:
        cn = ord(c) + pomeraj
        if cn > ord('z'):
            cn -= 26
        rez_slova.append(chr(cn))
else: # desifrovanje
    for c in rec:
        cn = ord(c) - pomeraj
        if cn < ord('a'):
            cn += 26
        rez_slova.append(chr(cn))
rezultat = "".join(rez_slova)
print(rezultat)
```

Крађи начин да се изврши кодирање карактера је да се употреби модуларна аритметика. Кључно место при одређивању резултата има редни број карактера у абецеди који се може добити одузимање кода карактера `a` од кода карактера који се обрађује. Померање онда подразумева сабирање са померајем или одузимање помераја по модулу 26. Начин да се то уради описан је у задацима Операције по модулу и Монопол. Можемо приметити да одузимање помераја одговара додавању супротног помераја, што значи да се и шифровање и дешифровање може извршити истом функцијом (приликом дешифровања њој се проследи негативна вредност помераја). Сабирањем по модулу добија се редни број траженог карактера у абецеди, док се сам карактер добија сабирањем са кодом карактера `a`. Дакле, централна формула која нам помаже да одредимо кôд који се добија шифровањем тј. дешифровањем карактера `c` је `'a' + (c - 'a' + pomeraj + 26) % 26'`. Број `26` је додат да би се осигурало да је број на који се примењује остатак при дељењу позитиван (што је објашњено у задатку Монопол).

```
def sifruj_slovo(c, pomeraj):
    return chr(ord('a') + (ord(c) - ord('a') + pomeraj + 26) % 26)

def sifruj_rec(rec, pomeraj):
    return "".join((sifruj_slovo(c, pomeraj) for c in rec))

rec = input()
pomeraj = int(input())
smer = int(input())
if smer == 1: # sifrovanje
    rezultat = sifruj_rec(rec, pomeraj)
else: # desifrovanje
    rezultat = sifruj_rec(rec, -pomeraj)
print(rezultat)
```

6.2.5 Запис бројева и бројевних израза

Задатак: Бројевне основе

Написати програм којим се унети природан број приказује у бинарном, октално и хексадекадном систему.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се природан број n ($0 \leq n \leq 2 \cdot 10^9$).

Излаз: У првој линији стандардног излаза налази се бинарни запис, у другој линији октални запис и у трећој линији хексадекадни запис броја n. У хексадекадном запису користити велика слова.

Пример

Улаз	*Излаз*
234	11101010
	352
	EA

Решење

Природан број n се може превести у запис у било којој другој основи применом алгоритма дуалног Хорнеровој шеми који је заснован на итеративном дељењу са основом, а који смо већ приказали, на пример, у задатку

Број и збир цифара броја (а раније, на пример, и у задатку Октални бројеви). Цифре броја се одређују као остаци при дељењу са основом. Заиста, ако се број n у основи b записује цифрама $(a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b$, тада је $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$. Зато је последња цифра a_0 једнака $n \bmod b$, док вредност $n \operatorname{div} b = a_k b^{k-1} + a_{k-1} b^{k-2} + \ldots + a_2 b + a_1$ представља запис броја који се добија брисањем последње цифре из записа броја n тј. запис броја $(a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1)_b$. Ако вредност n заменимо вредношћу $n \operatorname{div} b$, наредна цифра a_1 се одређује као остатак при дељењу нове вредности броја n основом b, док се n опет мења вредношћу $n \bmod b$. Поступак се понавља све док вредност променљиве n не постане 0. Дакле, цифре одређујемо у петљи у чијем сваком кораку одређујемо остатак $n \bmod b$ и вредност n мењамо вредношћу $n \operatorname{div} b$. Вредност $n = 0$ представља специјалан случај и он је посебно покривен.

Приметимо да смо на овај начин одредили низ цифара броја у обратном редоследу и да бисмо их исписали у исправном редоследу потребно је некако их упамтити. Додатно, ако је основа већа од 10, цифре се могу представљати и словима `A`, `B`, `C` итд. Зато је пожељно да сваку цифру коју одредимо претворимо у одговарајући карактер. Због ефикасности резултат током рада можемо да памтимо као листу карактера, па да га на крају претворимо у ниску у обрнутом редоследу.

Конверзију цифре у карактер можемо остварити посебном функцијом: ако је вредност цифре мања од 10, онда карактер који је представља добијамо њеним сабирањем са UNICODE кодном тачком карактера `0`, а у супротном карактер добијамо сабирањем разлике цифре и броја 10 са UNICODE кодном тачком карактера `A` (сличну технику баратања кодовима карактера видели смо, на пример, у задатку Трансформација карактера).

Према захтеву овог задатка, циљне основе су бинарна, октална и хексадекадна тако да у главном програму вршимо конверзију у сваку од те три основе и исписујемо резултат.

```
# datu numericku vrednost cifre (broj od 0 do 15) prevodi u
# karakter i to 0, 1, ..., 9, A, B, ..., F
def cifra_u_znak(x):
  if x < 10:
    return chr(x + ord('0'))
  else:
    return chr(x - 10 + ord('A'))

# odredjuje zapis broja n u osnovi osnova
def prevod(n, osnova):
    if n == 0: return "0"

    s = ""
    while n > 0:
        s = cifra_u_znak(n % osnova) + s
        n //= osnova

    return s

# ucitavamo broj i odredjujemo mu binarni, oktalni i heksadekadni
# zapis
n = int(input())
print(prevod(n, 2))
print(prevod(n, 8))
print(prevod(n, 16))
```

Свака нова цифра која се одреди, тј. њој придружени карактер треба додати на почетак ниске у коју се акумилира резултат. За то је могуће употребити оператор `+` којим се врши надовезивање ниски, међутим, вреди на овом месту напоменути да је у случају дугачких ниски додавање карактера на почетак постојеће ниске неефикасна операција коју треба избегавати. У овом случају ради се о веома кратким нискама, тако да овај проблем не долази до изражаја.

Ако се уместо података типа `str` користи листа карактера, онда је сваки нови карактер најбоље додати на крај низа, а када се све цифре одреде, обрнути садржај низа (начини да се ово уради описани су у задатку Обртање низа). Напоменимо и да је уместо обртања низа било могуће исписати га унатраг, но то решење је веома специфично и није увек применљиво.

```
# datu numericku vrednost cifre (broj od 0 do 15) prevodi u
```

```
# karakter i to 0, 1, ..., 9, A, B, ..., F
def cifra_u_znak(x):
  if x < 10:
    return chr(x + ord('0'))
  else:
    return chr(x - 10 + ord('A'))

# odredjuje zapis broja n u osnovi osnova
def prevod(n, osnova):
    if n == 0: return "0"

    s = []
    while n > 0:
        s.append(cifra_u_znak(n % osnova))
        n //= osnova

    return "".join(s[::-1])

# ucitavamo broj i odredjujemo mu binarni, oktalni i heksadekadni
# zapis
n = int(input())
print(prevod(n, 2))
print(prevod(n, 8))
print(prevod(n, 16))
```

Библиотечке функције

На крају, поменимо да је за ове бројевне основе решење могуће веома једноставно добити и библиотечким функцијама.

У Пајтону се за добијање записа броја `n` у бројевним системима основе 2, 8, 16 могу редом користити функције `bin(n)`, `oct(n)` и `hex(n)`. Како ове три функције испред записа броја додају префикс од два карактера, и то `0b` за бинарни, `0o` за октални и `0x` за хексадекадни систем, да бисмо тај префикс изоставили, исписиваћемо одговарајуће записе од позиције два.

```
# ucitavamo broj i odredjujemo mu binarni, oktalni i heksadekadni
# zapis
n = int(input())
print(bin(n)[2:])
print(oct(n)[2:])
print(hex(n)[2:].upper())
```

Задатак: Spreadsheet колоне

У програмима за табеларна израчунавања (Microsoft Excel, LibreOffice Calc и слично) колоне су обележене словима и то као A, B, …, Z, AA, AB, …, AZ, BA, BB, …, ZZ, AAA, … Напиши програм који омогућава конверзију редног броја (од 1 па навише) у текстуалну ознаку колоне и обратно.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 10$), а затим n ниски (свака у посебном реду) које садрже велика слова енглеског алфабета (највише 5). Након тога се уноси n бројева (сваки у посебном реду) из интервала од 1 до 12356630.

Излаз: На стандардни излаз исписати прво n бројева, па затим n ниски (свака у посебном реду) које одговарају унетим нискама тј. бројевима.

Пример

Улаз	*Излаз*
3	4
D	28
AB	12356630
ZZZZZ	R
18	CV
100	BDWGN
1000000	

Решење

Ако слову A придружимо вредност 1, слову B вредност 2, слову C вредност 3 и тако све до слова Z којем придружујемо вредност 26, можемо сматрати да се овде ради о запису броја у основи 26, са разликом да се не користи нула. Дакле, број се записује у облику $a_n \cdot 26^n + a_{n-1} \cdot 26^{n-1} + ... + a_1 \cdot 26 + a_0$, при чему су све цифре a_i између 1 и 26. Заиста, колона AA има редни број $1 \cdot 26 + 1 = 27$, док, на пример, колона CBA има редни број $3 \cdot 26^2 + 2 \cdot 26 + 1 = 2\,081$. Имајући ово у виду, словну ознаку колоне можемо превести у њен редни број коришћењем Хорнерове схеме (слично као, на пример, у задатку Вредност једноставног израза). Бројевна вредност сваке цифре се може добити тако што се од њеног кода одузме кôд карактера `'A'` и на то дода 1. Баратање кодовима карактера видели смо, на пример, у задатку Трансформација карактера.

У обратном смеру, мало ћемо модификовати алгоритам одређивања цифара у датој бројевној основи који, подсетимо се, одређује последњу цифру операцијом остатка при дељењу бројевном основом и уклања је операцијом целобројног дељења (исто као, на пример, у задатку Збир цифара четвороцифреног броја или Број и збир цифара броја). Редни број се може разложити на $a_n \cdot 26^n + a_{n-1} \cdot 26^{n-1} + ... + a_1 \cdot 26 + a_0$, при чему је вредности цифара a_i између 1 и 26. Ако се од броја одузме 1, последња цифра је између 0 и 25 и може се одредити одређивањем остатка при дељењу бројем 26. Ако се на тај остатак дода кôд карактера `'A'`, добија се кôд последњег карактера у словној ознаци колоне. Одређивањем целобројног количника при дељењу са 26 уклања се последња цифра и добија се број $a_n \cdot 26^{n-1} + a_{n-1} \cdot 26^{n-2} + ... + a_1$, при чему је вредност свих цифара a_i између 1 и 26. Ово је проблем исте структуре као полазни и одређивање његових цифара a_i може се вршити на исти начин (одузимањем броја 1, одређивањем остатака при дељењу и целобројним дељењем основом 26).

Рецимо да је изградња ниске узастопним додавањем карактера на њен почетак генерално веома неефикасна операција. Ипак, пошто се у задатку ради са веома кратким нискама, нећемо обраћати пажњу на то.

```
def u_broj(s):
    broj = 0
    for c in s:
        broj = broj * 26 + (ord(c) - ord('A') + 1)
    return broj

def od_broja(broj):
    rez = ""
    while broj > 0:
        broj -= 1
        rez = chr(ord('A') + broj % 26) + rez
        broj //= 26
    return rez

m = int(input())
for i in range(m):
    print(u_broj(input()))
for i in range(m):
    print(od_broja(int(input())))
```

Задатак: Вредност једноставног израза

Напиши програм који израчунава вредност једноставног аритметичког израза (нпр. `123*456`).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се једна линија текста која садржи једноставни аритметички израз добијен применом операција сабирања, одузимања или множења на два природна броја. Учитани текст не садржи

размаке. Напомена: вежбе ради, учитати целу ниску која садржи израз, а затим је рашчланити на делове.

Излаз: На стандардни излаз исписати вредност израза (она је сигурно између -10^9 и 10^9).

Пример

Улаз	*Излаз*
`32+73`	`105`

Решење

Ако ниска `s` садржи учитани израз, потребно је рашчланити је на два операнда и оператор који се налази између њих.

Први задатак је наћи позицију оператора. Један начин да се то уради је да се употреби библиотечка функција. Користићемо компрехенсију са условом да за сваки од карактера `+`, `-`, `*` методом `index` пронађемо његово прво појављивање у учитаној ниски. Листа коју формирамо ће имати само један елемент, јер ће се само један од знакова које тражимо налазити у учитаној ниски. Тај елемент је позиција знака операције.

Након проналажења позиције `p` на којој се налази оператор, потребно је издвојити део ниске испред оператора (он садржи први операнд) и део ниске иза оператора. То је опет могуће учинити библиотечким функцијама.

Да бисмо добили део ниске од позиције `p` до позиције `q` (без `q`), користимо запис `s[p:q]`. Овај запис смо употребљавали и у задатку Реч Франкенштајн. На крају, да бисмо обавили рачунску операцију, користићемо и функцију `int` за претварање ниске у цео број.

```
s = input()
pozicijaOperatora = [s.index(c) for c in "+-*" if c in s][0]
operand1 = s[0:pozicijaOperatora]
oper = s[pozicijaOperatora]
operand2 = s[pozicijaOperatora+1:]
a = int(operand1)
b = int(operand2)
if oper == '+':
    rezultat = a + b
elif oper == '-':
    rezultat = a - b
elif oper == '*':
    rezultat = a * b
print(rezultat)
```

Наравно, уместо библиотечких функција можемо направити ручну имплементацију свих релевантних алгоритама, мада је решење уз употребу библиотечких функција свакако много једноставније и боље.

Претрагу је могуће имплементирати и ручно (коришћењем алгоритма линеарне претраге, попут, на пример, оног у задатку Негативан број).

Методу за издвајање ниске можемо имплементирати тако што жељени распон карактера копирамо из једне ниске у другу.

Ручна имплементација заснована је на Хорнеровој шеми (слично као у задатку Збир два троцифрена). У почетку се резултат иницијализује на нулу, ниска цифара се обилази слева надесно (од позиције нула, па до краја) и у сваком кораку се претходни резултат множи са 10 и на њега додаје вредност текуће цифре. Вредност цифре се може добити од кода карактера његовим умањивањем за кôд карактера `0` (сличну технику баратања са кодовима видели смо и у задацима Трансформација карактера и Абецедно огледало).

```
def pozicijaOperatora(s):
    for i in range(len(s)):
        if s[i] in {'+', '-', '*'}:
            return i
    return -1

def stringUInt(s):
    n = 0
    for c in s:
        n = 10 * n + (ord(c) - ord('0'))
```

```
    return n

s = input()
poz = pozicijaOperatora(s)
operand1 = s[0:poz]
oper = s[poz]
operand2 = s[poz+1:]
a = stringUInt(operand1)
b = stringUInt(operand2)
if oper == '+':
    rezultat = a + b
elif oper == '-':
    rezultat = a - b
elif oper == '*':
    rezultat = a * b
print(rezultat)
```

Задатак: Арапски у римски

Напиши програм који преводи унети арапски број у римски.

Улаз: Са улаза се уноси природан број n ($1 \leq n \leq 2000$)

Излаз: На стандардни излаз се исписује римски запис броја n.

Пример

Улаз	*Излаз*
1978	MCMLXXVIII

Решење

Главна функција конверзије издваја цифру по цифру броја n операцијом целобројног остатка и уклања је операцијом целобројног количника при дељењу са 10, кренувши од цифре јединица (слично као у задатку Збир цифара четвороцифреног броја). Свака тако добијена цифра се конвертује у римски запис помоћном функцијом, прослеђујући јој симболе s_1, s_5 и s_{10} у зависности од тежине текуће цифре и тај запис се додаје испред досадашњег изграђеног резултата (који креће од празне ниске и проширује се на лево). Поступак се завршава када се обраде све цифре броја n тј. када се он целобројним дељењем сведе на нулу. Ако се то не деси ни након уклањања цифре стотине, преостали број (то је број хиљада) се конвертује у римски тако што се тај број пута на почетак резултата дода симбол M.

```
# zapis jedne rimske cifre - simbol1, simbol5 i simbol 10 odredjuju
# da li se radi i cifri jedinica, desetica ili stotina
def rimska_cifra(c, simbol1, simbol5, simbol10):
    if c < 4: # npr. "", "I", "II", "III"
        return simbol1 * c
    elif c == 4: # npr. "IV"
        return simbol1 + simbol5
    elif c < 9: # npr. "V", "VI", "VII", "VIII"
        return simbol5 + simbol1 * (c-5)
    else: # npr. "IX"
        return simbol1 + simbol10

# prevodi dati broj u rimski zapis
def arapski_u_rimski(n):
  rezultat = ""
  # cifra jedinica
  rezultat = rimska_cifra(n % 10, "I", "V", "X")
  n //= 10 # uklanjamo je
  # ako nema vise cifara vracamo rezultat
  if n == 0: return rezultat
  # cifra desetica
  rezultat = rimska_cifra(n % 10, "X", "L", "C") + rezultat
```

```
  n //= 10 # uklanjamo je
  # ako nema vise cifara vracamo rezultat
  if n == 0: return rezultat
  # cifra stotina
  rezultat = rimska_cifra(n % 10, "C", "D", "M") + rezultat
  n //= 10 # uklanjamo je
  # ako nema vise cifara vracamo rezultat
  if n == 0: return rezultat
  # dodajemo hiljade na pocetak rezultata i vracamo ga
  return ("M" * n) + rezultat

# ucitavamo broj
n = int(input())
# prevodimo ga u rimski zapis i ispisujemo rezultat
print(arapski_u_rimski(n))
```

Задатак: Римски у арапски

Напиши програм који конвертује римске у арапске бројеве.

Улаз: Једина линија стандардног улаза садржи један римски број из интервала од 1 до 2000.

Излаз: На стандардни излаз исписати унети број записан у уобичајеном (арапском) запису.

Пример

Улаз	*Излаз*
`MCMLXXVIII`	`1978`

Решење

Овај задатак је дуалан задатку Арапски у римски, али им се решења прилично разликују. Вредност исправно записаног римског броја се може одредити тако што читамо његове цифре с лева на десно и на текући збир додељујемо вредност сваке цифре (M има вредност 1000, D вредност 500, C вредост 100, L вредност 50, X вредност 10, V вредност 5 и I вредност 1). Једини изузетак од овог правила је случај када се у запису појави мања испред веће цифре и тада се од текућег збира та цифра одузима. На пример, израчунајмо вредност записа MCMLXXIV. На основу претходне дискусије, вредност овог броја је 1000 - 100 + 1000 + 50 + 10 + 10 - 1 + 5 тј. 1974. Резултат се иницијализује на нулу. Прва цифра је M иза које није већа цифра, па се резултат увећава за 1000. Након тога наступа случај у којем следи цифра C која је мања од наредне цифре M, тако да се од збира одузима вредност 100 и добија се вредност 900. Након тога се на збир додаје 50, па два пута 10 и добија се збир 1970, док се не наиђе на цифру I која је мања од њој наредне цифре V. Зато се од збира одузима вредност 1 и добија се 1969, пре него што се на крају дода вредност последње цифре V и добије коначан резултат 1974.

Пролаз кроз све римске цифре датог римског броја вршимо у склопу једне петље у којој индексна променљива `i` мења своју вредност од нуле, па све док је мања од дужине ниске којом је записан римски број. У телу петље се за сваку цифру проверава да ли непосредно иза ње постоји цифра која је од ње већа (при том се мора водити рачуна и о томе да текућа цифра није последња). Ако таква цифра постоји, онда се текући збир умањи за вредност текуће цифре, у супротном се на збир додаје вредност текуће цифре. У сваком случају индексна променљива се увећава за 1 (прескаче се текућа и прелази се на наредну цифру, ако она постоји).

Вредност дате цифре можемо одредити гранањем (најбоље наредбом `switch`, слично као, на пример, у задатку Број дана у месецу).

```
def cifra(c):
    if c == 'M':
        return 1000
    elif c == 'D':
        return 500
    elif c == 'C':
        return 100
    elif c == 'L':
        return 50
```

```
    elif c == 'X':
        return 10
    elif c == 'V':
        return 5
    elif c == 'I':
        return 1
    else:
        return 0

def rimski_u_arapski(rimski):
    # rezultat - vrednost rimski zapisanog broja
    arapski = 0
    # prolazimo kroz sve cifre rimskog broja
    for i in range(len(rimski)):
        # ako neposredno iza tekuce postoji cifra veca od nje
        if i + 1 < len(rimski) and cifra(rimski[i]) < cifra(rimski[i+1]):
            # rezultat umanjujemo za vrednost tekuce cifre
            arapski -= cifra(rimski[i])
        else:
            # inace rezultat uvecavamo za vrednost tekuce cifre
            arapski += cifra(rimski[i])
    # vracamo konacan rezultat
    return arapski

# ucitavamo rimski zapis broja
rimski = input()
# odredjujemo mu vrednost i ispisujemo je
print(rimski_u_arapski(rimski))
```

Види другачија решења овог задатка.

6.3 Пресликавања

Често у програму имамо потребу да представимо пресликавање тј. функцију која одређеним *кључевима* једнозначно придружује одређене *вредности*. На пример, желимо да сваком ученику придружимо просек оцена или да сваком месецу придружимо број дана у том месецу. Таква пресликавања можемо представити посебном врстом низова који се називају *асоцијативни низови* (каже се и *речници* или *мапе*), а у неким посебним случајевима и класничним низовима.

6.3.1 Класични низови у функцији пресликавања

Када је скуп кључева интервал природних бројева облика $[0, n)$ или када се кључеви једноставно могу трансформисати у тај облик, тада је осим речником пресликавање могуће представити и класичним низом. Вредност придружену кључу i памтићемо на позицији i у низу. У наредних неколико задатака приказаћемо употребу низова у улози пресликавања.

Задатак: Назив месеца

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Потребно је извршити класификацију на основу једне од 12 могућих вредности.

Веома језгровит начин укључује коришћење низа који садржи називе месеца. Такав низ одређује пресликавање којим се вредност одређује на основу кључа. Пошто су кључеви бројеви месеца, а вредности њихова имена, кључеви су између 1 и 12 и у низу називе можемо поређати почевши од позиције 1.

```
meseci = ["", "januar", "februar", "mart", "april", "maj", "jun", "jul",
          "avgust", "septembar", "oktobar", "novembar", "decembar"];
mesec = int(input())
print(meseci[mesec])
```

Задатак: Успех ученика

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Уместо гранања, могуће је да се поруке које треба исписати за сваки успех смештају у низ и да се испише одговарајући елемент низа.

```
import math

prosek = float(input())          # prosecna ocena ucenika
uspeh = math.floor(prosek + 0.5) # zaokruzujemo na najblizi ceo broj
uspesi = ["nedovoljan", "dovoljan", "dobar", "vrlodobar", "odlican"]
print(uspesi[uspeh - 1])
```

Задатак: Различите цифре

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Постоје различити начини да се провери да ли су све цифре броја различите.

Скуп виђених цифара можемо представити низом од 10 елемената типа `bool`, тако да елемент на позицији 0 означава да ли се цифра 0 јавља у скупу, на позицији 1 означава да ли се цифра 1 јавља у скупу и тако даље. На почетку је сваком члану низа потребно доделити вредност `false` (на почетку је скуп виђених цифара празан).

```
def razliciteCifre(n):
    skupCifara = [False] * 10
    while n > 0:
        cifra = n % 10
        if skupCifara[cifra]:
            return False
        skupCifara[cifra] = True
        n //= 10
    return True

n = int(input())
print("DA" if razliciteCifre(n) else "NE")
```

Задатак: Да ли се даме нападају

Дата је шаховска табла на којој је распоређено осам дама. Напиши програм који проверава да ли се неке две даме нападају (две даме се нападају ако се налазе у истој врсти, истој колони или на истој дијагонали).

Улаз: Са стандардног улаза учитава се $0-1$ матрица димензије 8×8 чијих 8 јединица описује положај 8 дама.

Излаз: На стандардном излазу исписати текст `NE` ако се даме не нападају или `DA` ако се неке две даме нападају.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	NE

Пример 2

Улаз	*Излаз*
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0	DA

Решење

Током учитавања позиција дама желимо да за сваку врсту, сваку колону, сваку главну и сваку споредну дијагоналу знамо да ли већ садржи неку даму. То можемо остварити тако што направимо пресликавања која су представљена низовима логичких вредности. Постоји 8 врста, 8 колона, 15 главних и 15 споредних дијагонала, па ћемо димензије низова одредити на основу тога. Дама на позицији (v, k) припада врсти број v, колони k, главној дијагонали број $v + k$, и споредној дијагонали број $v - k + 7$ (број 7 додајемо да бисмо избегли негативне редне бројеве дијагонала).

```
vrste = [False] * 8
kolone = [False] * 8
glavne_dijagonale = [False] * 15
sporedne_dijagonale = [False] * 15
napadaju_se = False
v = 0
while v < 8 and not(napadaju_se):
    red = input().split()
    k = 0
    while k < 8 and not(napadaju_se):
        if red[k] == "1":
            if vrste[v]:
                napadaju_se = True
            else:
                vrste[v] = True
            if kolone[k]:
                napadaju_se = True
            else:
                kolone[k] = True
            if glavne_dijagonale[v+k]:
                napadaju_se = True
            else:
                glavne_dijagonale[v+k] = True
            if sporedne_dijagonale[v - k + 7]:
                napadaju_se = True
            else:
                sporedne_dijagonale[v - k + 7] = True
        k += 1
    v += 1

print("DA" if napadaju_se else "NE")
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Фреквенција знака

Написати програм који чита једну реч текста коју чине само велика слова енглесне абецеде и исписује слово који се најчешће појављује и колико пута се појављује. Ако се више слова најчешће појављује, исписује се слово које се пре појавило у речи.

Улаз: У једној линији стандардног улаза налази се једна реч текста са не више од 20 слова.

Излаз: У првој линији стандарног излаза приказати слово које се најчешће појављује, а у другој линији стандардног улаза исписати и колико пута се појављује.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`POPOKATEPETL`	`P` `3`	`BACACB`	`B` `2`

Решење

Кључни део задатака је да се за свако велико слово енглеског алфабета изброји колико се пута појављује у датој речи. Потребно је, дакле, увести 26 различитих бројача - по један за свако велико слово енглеског алфабета. Јасно је да увођење 26 различитих променљивих не долази у обзир. Потребна је структура података која пресликава дати карактер у број његових појављивања.

Најбоља таква структура у овом задатку је низ бројача у којем се на позицији нула чува број појављивања слова `A`, на позицији један слова `B` итд., све до позиције 25 на којој се налази број појављивања слова `Z`. Централно питање је како на основу карактера одредити позицију његовог бројача у низу. За то се користи чињеница да су карактерима придружени нумерички кодови (Unicode кодне тачке у Пајтону) и то на основу редоследа карактера у енглеском алфабету. Редни број карактера је зато могуће одредити одузимањем кода карактера `A` од кода тог карактера (на пример, кôд карактера `D` је 68, док је код карактера `A` 65, одузимањем се добија 3, што значи да се бројач карактера `D` налази на месту број 3 у низу). Сличну технику баратања кодовима карактера срели смо, на пример, и у задатку Абецедно огледало.

Задатак можемо решавати тако што ћемо два пута проћи кроз низ унетих слова тј. реч. У првом пролазу бројач појављивања сваког великог слова на које наиђемо увећавамо за 1. Након тога (или паралелно са тим) одређујемо и максималан број појављивања неког слова (за то користимо уобичајене начине за одређивање максимума низа, као, на пример, у задатку Минимално одступање од просека). У другом пролазу кроз низ унетих слова тј. реч тражимо прво слово речи чији је број појава једнак већ нађеном највећем броју појава неког слова. Када га нађемо исписујемо га и прекидамо петљу (на пример, наредбом `break`). Приметимо да овде заправо вршимо једноставну линеарну претрагу (попут оне у задатку Негативан број).

```
# rec koja se analizira
rec = input()
# broj pojavljivanja svakog slova od A do Z
broj_pojavljivanja = [0] * 26
# uvecavamo broj pojavljivanja svakog slova iz reci
for slovo in rec:
    broj_pojavljivanja[ord(slovo) - ord('A')] += 1
# odredjujemo najveci broj pojavljivanja slova
max_pojavljivanja = 0
for i in range(26):
    if broj_pojavljivanja[i] > max_pojavljivanja:
        max_pojavljivanja = broj_pojavljivanja[i]
# ispisujemo slovo koje se prvo pojavljuje u reci sa tim brojem
# pojavljivanja
for slovo in rec:
    if broj_pojavljivanja[ord(slovo) - ord('A')] == max_pojavljivanja:
        print(slovo)
        print(max_pojavljivanja)
        break
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Изоморфне ниске

Две ниске су изоморфне ако се друга може добити неким 1-1 пресликавањем слова прве - сваком слову абецеде одговара неко слово (његова слика у том пресликавању), свако појављивање тог слова у првој ниски се замењује том сликом, при чему не постоје два слова која имају исту слику. На пример, речи `filip` и `cilim` су изоморфне (`f` се слика у `c`, `i` у `i`, `l` у `l` и `p` у `m`), док речи `filip` и `madam` нису изоморфне (слово `m` би требало да буде слика и слова `f` и слова `p`, што није допуштено). Напиши програм који испитује да ли су две унете речи изоморфне.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају две речи састављене од малих слова енглеске абецеде, свака у посебном реду.

Излаз: На стандардни излаз исписати `da` ако су речи изоморфне, тј. `ne` у супротном.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
`filip`	`da`
`leden`	

Пример 2

Улаз	*Излаз*
`filip`	`ne`
`melem`	

Решење

На почетку је потребно проверити да ли су ниске исте дужине (ако нису, одмах констатујемо да нису изоморфне). Затим пролазимо кроз све карактере прве ниске, одржавајући при том тренутно (парцијално) пресликавање. За свако слово прве ниске проверавамо да ли му је слика дефинисана у тренутном пресликавању - ако јесте, проверавамо да ли је једнака одговарајућем слову друге ниске - ако није, ниске нису изоморфне. Ако слика слова није дефинисана, онда би морала да буде дефинисана на одговарајуће слово друге ниске. То, међутим, није могуће ако је то слово већ раније постављено као слика неког слова (ако се то деси, ниске нису изоморфне).

Прво питање је како представити пресликавање, како проверити да ли је неко слово у њему дефинисано, која му је придружена слика и да ли је неко слово већ дефинисано као слика у том пресликавању. Пошто домен тог пресликавања чине мала слова енглеске абецеде (њих 26), могуће је користити и обичан низ карактера, где ћемо на месту 0 чувати слику карактера `a`, на месту 2 слику карактера `b` итд. Позицију на којој се чува слика карактера `chr` лако одређујемо као разлику кода тог карактера и карактера `a` (слично као у задатку Фреквенција знака).

Друго питање је како испитати да ли је неки карактер већ придружен као слика. Наивни начин да се то уради је да се прође кроз цело пресликавање. Међутим, боље решење је да се уместо тога, паралелно са пресликавањем одржава и скуп карактера које су додељене као слике у том пресликавању и да се проверава да ли тражени карактер припада том скупу. Пошто је универзални скуп (скуп свих могућих слика) мали, могуће је употребити обичан низ у којем се карактери пресликавају у истинитосне вредности (`True` ако карактер припада скупу слика тренутног пресликавања тј. `False` ако не припада) - индекси у том низу се поново одређују једноставним рачунањем разлике кода траженог карактера и кода карактера `a`.

```
def rbr(c):
    return ord(c) - ord('a')

def izomorfne(a, b):
    if (len(a) != len(b)):
        return False
    sifra = [' '] * 26
    upotrebljeni = [False] * 26
    for i in range(len(a)):
        if sifra[rbr(a[i])] != ' ':
            if sifra[rbr(a[i])] != b[i]:
                return False
        else:
            if upotrebljeni[rbr(b[i])]:
                return False;
            else:
                sifra[rbr(a[i])] = b[i]
                upotrebljeni[rbr(b[i])] = True
    return True

s = input()
t = input()
print(”da” if izomorfne(s, t) else ”ne”)
```

Види другачија решења овог задатка.

Задатак: Број дана у месецу

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Задатак: Хистограм

Група биолога аматера је посматрала популацију жаба. За сваку жабу су забележили величину. Билоге је занимала расподела величина жаба (колико је било малих жаба, колико мало већих, колико највећих и слично). Зато су интервал величина $[a, b]$ поделили на n делова једнаке дужине и избројали колико жаба је припадало сваком од тих делова (ако је величина жабе тачно на граници између два дела, придружује се десном). Напиши програм који им у томе помаже и резултат приказује графички, у облику хистограма.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају бројеви a и b раздвојени једним размаком, а затим у следећем реду и број n. Након тога уноси се број жаба k, а затим и k бројева из интервала $[a, b)$ које представљају величине жаба.

Излаз: На стандардни излаз се приказују се подеоци (са границама заокругленим на три децимале), након чега се приказује број жаба чија је величина у том подеоку, а затим и процентуални удео жаба у том подеоку у односу на укупан број жаба (тако што се тај проценат заокружи на најближи цео број и затим испише толико карактера `*`). Звездице су од броја жаба одвојене једним табулатором (знаком Tab).

Пример 1

Улаз
```
0.0 1.0
4
10
0.05
0.25
0.95
0.93
0.56
0.73
0.10
0.47
0.23
0.15
```

Излаз
```
[0.000, 0.250): 4  ****************************************
[0.250, 0.500): 2  ********************
[0.500, 0.750): 2  ********************
[0.750, 1.000): 2  ********************
```

Задатак: Двојке и тројке дељиве са 3

У датом низу природних бројева дужине n, одреди број група од два или три елемента таквих да је сума свих елемената групе дељива са 3. На пример у низу $[2, 1, 3, 10]$ имамо 4 такве групе: $[2, 1]$, $[2, 10]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 3, 10]$.

Улаз: У првој линији стандардног улаза налази се број елемената низа n ($1 \leq n \leq 1000$). У следећих n линија налази се редом елементи низа (природни бројеви између 0 и 1000).

Излаз: На стандардном излазу у једној линији приказати број тражених група у низу.

Пример

Улаз
```
4
2
1
3
10
```

Излаз
```
4
```

Задатак: Најчешће мало и велико слово

Уноси се ред по ред текста све до краја улаза. Текст садржи мала и велика слова енглеске абецеде, интерпункцијске знаке и белине. Напиши програм који одређује и исписује најчешће мало и најчешће велико слово у тексту у засебним редовима. Ако се нека слова појављују исти број пута, исписати их сва (у абецедном поретку) али мала слова у једном реду а велика слова у другом реду.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се текст који садржи бар једно слово, све док се не дође до краја улаза (он се може унети са Ctrl+Z тј. Ctrl+D).

Излаз: Ако текст садржи и мала и велика слова, излаз се састоји од две линије. У првој линији стандардног излаза приказати мала слова која се најчешће појављују, а у другој линији велика слова која се најчешће појављују.

Ако текст садржи само мала или само велика слова, излаз се састоји од једне линије, а линија која се односи на другу врсту слова се изоставља.

Пример 1		**Пример 2**	
Улаз	*Излаз*	*Улаз*	*Излаз*
`asd`	`ds`	`asd`	`ads`
`sd, asd!`	`C`		
`ABC..CB`			
`CA`			

6.3.2 Асоцијативни низови (мапе, речници)

Програмски језик Пајтон пружа подршку за креирање речника (мапа, асоцијативних низова) који представљају колекције података у којима се кључевима неког типа придружују вредности неког типа (не обавезно истог). На пример, именима месеци (подацима типа `string`) можемо доделити број дана (податке типа `int`). Речници се представљају објектима типа `dict`. На пример,

```
broj_dana = {
    ”januar”: 31,
    ”februar”: 28,
    ”mart”: 31,
    ...
}
```

Речник није неопходно иницијализовати одмах током креирања, већ је вредности могуће додавати (а и читати) коришћењем индексног приступа (помоћу заграда `[]`).

```
broj_dana = {}
broj_dana[”januar”] = 31
broj_dana[”februar”] = 28
broj_dana[”mart”] = 31
...
```

Речник, дакле, можемо схватити и као низ тј. листу у коме индекси нису обавезно из неког целобројног интервала облика $[0, n)$, већ могу бити произвољног типа.

Проверу да ли је неком кључу придружена вредност у речнику можемо остварити оператором `in` (он враћа `True` ако и само је датом кључу придружена нека вредност). Уместо да прво проверавамо да је вредност кључа присутна а затим да читамо вредност тог кључа, могуће је користити метод `get` који вредност чита само у једном обиласку речника (уместо у два). На пример,

```
mesec = input();
broj = broj_dana.get(mesec, -1)
if broj == -1:
   print(”Broj dana:”, broj)
else:
   print(”Mesec nije korektno unet”)
```

Све елементе речника могуће је исписати коришћењем петље `for`. На пример,

```
for x in broj_dana:
     print(x, ”: ”, broj_dana[x])
```

или, нешто ефикасније

```
for mes, dana in broj_dana.items():
     print(mes, ”: ”, dana)
```

Задатак: Редни број месеца

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Потребно је извршити класификацију на основу једне од 12 могућих вредности. Међутим, пошто је потребно унети назив месеца и класификацију извршити на основу тог текста, неопходно је употребити ниску карактера.

Можемо поново реализовати асоцијативно пресликавање којим се кључ (назив месеца) пресликава у вредност (редни број). Међутим, то више не може бити обичан низ (јер кључеви нису мали природни бројеви), већ такозвани асоцијативни низ. У Пајтону можемо употребити речник који називима месеца (нискама карактера) додељује редне бројеве.

```
meseci = {}
meseci[”januar”] = 1
meseci[”februar”] = 2
meseci[”mart”] = 3
meseci[”april”] = 4
# ...

mesec = input()
print(meseci[mesec])
```

Задатак: Римски у арапски

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Вредности цифара можемо чувати у асоцијативном низу (мапи, речнику).

```
def rimski_u_arapski(rimski):
    # vrednost svake rimske cifre
    cifre = {'M':1000, 'D':500, 'C':100, 'L':50, 'X': 10, 'V':5, 'I': 1}
    # rezultat - vrednost rimski zapisanog broja
    arapski = 0
    # prolazimo kroz sve cifre rimskog broja
    for i in range(len(rimski)):
        # ako neposredno iza tekuce postoji cifra veca od nje
        if i + 1 < len(rimski) and cifre[rimski[i]] < cifre[rimski[i+1]]:
            # rezultat umanjujemo za vrednost tekuce cifre
            arapski -= cifre[rimski[i]]
        else:
            # inace rezultat uvecavamo za vrednost tekuce cifre
            arapski += cifre[rimski[i]]
    # vracamo konacan rezultat
    return arapski

# ucitavamo rimski zapis broja
rimski = input()
# odredjujemo mu vrednost i ispisujemo je
print(rimski_u_arapski(rimski))
```

Задатак: Изоморфне ниске

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Директан начин да се представи пресликавање је да се употребе библиотечке колекције, чиме се добија мало читљивији текст програма. И скуп може бити представљен библиотечким колекцијама.

```
def izomorfne(a, b):
    if (len(a) != len(b)):
        return False
    sifra = dict()
    upotrebljeni = set()
    for i in range(len(a)):
        if a[i] in sifra:
            if sifra[a[i]] != b[i]:
                return False
        else:
            if b[i] in upotrebljeni:
                return False;
            else:
                sifra[a[i]] = b[i]
                upotrebljeni.add(b[i])
    return True

s = input()
t = input()
print(”da” if izomorfne(s, t) else ”ne”)
```

Задатак: Фреквенција знака

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. Види текст задатка.

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Пресликавање карактера у њихов број појављивања могуће је остварити и библиотечким структурама података које представљају тзв. асоцијативне низове (мапе, речнике). Ипак, ове структуре података су примерније за ситуације у којима није тако једноставно на основу кључа добити њихову нумеричку вредност и када је скуп допустивих кључева шири.

```
# rec koja se analizira
rec = input()
# broj pojavljivanja svakog slova od A do Z
broj_pojavljivanja = {}
# uvecavamo broj pojavljivanja svakog slova iz reci
for slovo in rec:
    broj_pojavljivanja[slovo] = broj_pojavljivanja.get(slovo, 0) + 1

# odredjujemo najveci broj pojavljivanja slova
max_pojavljivanja = 0
for slovo, broj in broj_pojavljivanja.items():
    if broj > max_pojavljivanja:
        max_pojavljivanja = broj

# ispisujemo slovo koje se prvo pojavljuje u reci sa tim brojem
# pojavljivanja
for slovo in rec:
    if broj_pojavljivanja[slovo] == max_pojavljivanja:
        print(slovo)
        print(max_pojavljivanja)
        break
```

Задатак: Фреквенције речи

Милица је куповала разне производе и сваки пут када се вратила из куповине дописивала је све производе које је купила на списак. Напиши програм који помаже Милици да одреди производ који је најчешће куповала током претходне године.

Улаз: Са стандардног улаза учитавају се називи производа, све док се не дође до краја улаза. Сваки назив је реч која садржи највише 10 малих слова енглеског алфабета.

Излаз: На стандардни излаз исписати један ред који садржи назив најчешће купованог производа, један размак и број пута колико је тај производ купљен. Ако је више производа купљено исти број пута, исписати онај који је први по абецедном редоследу.

Пример

Улаз	*Излаз*
jabuka hleb kruska jabuka sljiva hleb mleko jabuka hleb	hleb 3

Решење

Бројање речи

Овај задатак је донекле сличан задатку Фреквенција знака, једино што се уместо појединачних карактера броје речи. Поново је централно место у задатку избројати појављивања сваке речи која се јавила на улазу. За разлику од ситуације када смо на основу кода карактера могли одредити његову позицију и тако број појављивања сваког карактера чувати у низу бројача, овај пут то није једноставно и у ефикасном решењу је потребно користити напредније структуре података.

Учитавамо реч по реч док не дођемо до краја улаза (слично као у задатаку Читање до краја улаза). За сваку реч увећавамо њен број појављивања у мапи тј. у речнику.

Једном када је познат број појављивања сваке речи, тада је могуће одредити тражену реч са најмањим бројем појављивања. Пошто се у случају више речи са истим бројем појављивања тражи она која је лексикографски најмања, користимо лексикографско поређење (хијерархијско поређење на основу више критеријума), као, на пример, у задатку Победник у три дисциплине.

```
import sys

brojPojavljivanja = {}

for rec in sys.stdin:
    rec = rec.rstrip()
    brojPojavljivanja[rec] = 1 + brojPojavljivanja.get(rec, 0)

maksBroj = 0; maksRec = ""
for (rec, broj) in brojPojavljivanja.items():
    if broj > maksBroj or broj == maksBroj and rec < maksRec:
        (maksBroj, maksRec) = (broj, rec)

print(maksRec, maksBroj)
```

Задатак: Миноморија

Ученици играју игру Миноморија. Игра се састоји у томе да играчи могу да током 10 секунди погледају низ од N различитих бројева. Након тога они морају да одговоре на серију од Q питања о томе на ком месту у низу се налази одређени број (места се броје од 1 до N). Ако броја из питања нема у улазном низу, играч треба да одговори 0.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава један цео број N ($0 < N \leq 10^5$), који представља број чланова низа. У другом реду улаза налази се N чланова низа A_i ($0 \leq A_i < 10^7$), раздвојених по једним размаком. У трећем реду улаза налази се природан број Q ($0 < Q \leq 10^5$) који представља број упита. Од четврог реда па надаље у сваком реду се налази по један цео број Q_i ($0 \leq Q_i \leq 10^7$). За сваки број из упита потребно је у посебном реду стандардног излаза исписати на ком месту у улазном низу се он налази или 0 ако број из упита не постоји у задатом низу.

Излаз: За сваки упит треба исписати у посебном реду одговор који се у тексту задатка тражи (позиција броја у низу или 0 ако траженог броја нема у задатом низу).

Пример 1

Улаз	*Излаз*
10 100 233 5 9 11 698 1234 25 113 654 6 233 234 654 1000000 11 100	2 0 10 0 5 1

Задатак: Телефонски именик

Телефонски именик ради у телефону аутоматски кориснику нуди бројеве телефона који садрже тренутно унете цифре као подниз. Претпоставићемо да се у именику сваки број појављује највише једном и да су сви бројеви телефона деветоцифрени. Претпоставимо и да се, на пример, у именику тренутно налазе бројеви 123456789, 102030000 и 987123456.

- Када се унесе 123, кориснику се нуде бројеви 123456789 и 987123456.
- Када се унесе 30, кориснику се нуди само број 102030000.

Напиши програм који за сваки број у именику одређује најкраћи низ цифара које је могуће откуцати да би се приказао само тај број (ако има више таквих низова, приказати онај који се први јавља у броју, гледајући слева надесно).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број телефонских бројева у именику n ($1 \leq n \leq 10^5$), а затим n деветоцифрених бројева из n наредних редова.

Излаз: На стандардни излаз исписати n бројева који за сваки унети број редом дају минимални број цифара.

Пример 1

Улаз	*Излаз*
3 123456789 102030000 987123456	67 0 98

Пример 2

Улаз	*Излаз*
4 123456789 193456789 134567819 934567891	2 193 13 91

6.4 Вишедимензиони низови и матрице

6.4.1 Елементи програмског језика

6.4.1.1 Матрице

Матрица може да се посматра као низ низова: имамо низ врста (редова), а свака врста је низ елемената. Позиција сваког елемента у матрици је дефинисана са два броја, тј. две димензије – у којој *врсти* тј. *реду*, и у којој *колони* се елемент налази.

Матрица се формира слично као што се формира низ. Тако, ако рецимо хоћемо да дефинишемо матрицу, која има 50 врста и 100 колона, а сви елементи су нуле, то бисмо урадили на следећи начин:

```
a = [ [0 for kol in range(100)] for vrsta in range(50) ]
```

Овим се формира матрица `a` од 5000 елемената. Врсте ове матрице су нумерисане од 0 до 49, а колоне су нумерисане од 0 до 99.

Једном елементу матрице приступамо тако што у угластим заградама, након назива матрице наведемо број врсте, а затим у другим угластим заградама број колоне у којој се тај елемент налази. Када приступимо елементу матрице, можемо са њим радити све што можемо и са обичном променљивом: користити га у рачуници, постављати му вредност, итд.

На пример, дигитална, црно-бела слика може да се представи помоћу целобројне матрице тако што ће број 1 да означава црно, а број 0 бело поље, на следећи начин:

```
slika = [
    [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0],
    [ 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0],
    [ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
]
```

Димензије креиране матрице одговарају броју елемената које смо унели, тако да ће ова матрица имати 10 врста и 15 колона.

6.4.1.2 Разуђени низови

У језику Пајтон свака врста матрице је листа за себе и она може имати било који број елемената, независно од осталих врста. Овако формирана матрица је у ствари низ низова у правом смислу те речи, а такви низови се називају *разуђени низови* (енгл. *jagged array*).

Разуђени низови се могу формирати и на овај начин:

```
razudjen_niz = [ [] for _ in range(3) ]
razudjen_niz[0] = [0] * 5
razudjen_niz[1] = [0] * 4
razudjen_niz[2] = [0] * 2
```

Овим је направљен разуђен низ који има три врсте, у првој се чува пет елемената, у другој четири и у трећој два.

Као што смо видели, елементу се приступа помоћу двоструких угластих заграда. На пример, `razudjen_niz[1][3]` означава четврти елемент у другој врсти.

Напоминьемо да се `[ [1] for _ in range(3) ]` и `[ [1] ] * 3` веома разликују. У првом случају је формирана листа која садржи три **различите** листе од којих свака садржи број 1, а у другом се једна иста листа `[1]` појављује на три места у листи која је садржи. Тако на пример, програм

```
b = [ [1] for _ in range(3) ]
b[0].append(2)
b[0].append(3)
for red in range(len(b)):
    for kol in range(len(b[red])):
        print(b[red][kol], end=' ')
    print()
```

исписује

```
1 2 3
1
1
```

док следећи програм

```
c = [ [1] ] * 3
c[0].append(2)
c[0].append(3)
for red in range(len(c)):
    for kol in range(len(c[red])):
        print(c[red][kol], end=' ')
    print()
```

исписује

```
1 2 3
1 2 3
1 2 3
```

6.4.2 Матрице

Задатак: Број бомби у околини

У игрици Minesweeper на пољима се налазе сакривене бомбе и задатак играча је да их пронађе. Играчу се приказује табла са бројевима где сваки број представља број бомби које се налазе у околини датог поља (гледају се околна поља у свих 8 смерова). Твој задатак је да започнеш програмирање ове игре тако што ћеш написати програм који за дати распоред бомби одређује ове бројеве.

Улаз: Са стандардног улаза се учитавају два броја m и n који представљају димензије табле ($3 \leq m, n \leq 100$) и након тога матрица која има m врста и n колона која садржи нуле и јединице (где јединица означава бомбу).

Излаз: Матрица димензије $m \times n$ која одређује број бомби у околини сваког поља полазне матрице.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 4	2 2 3 1
0 1 0 1	2 4 3 2
1 0 1 0	2 2 2 1
0 1 0 0	

Решење

Након алокације и учитавања почетне матрице бомби (матрице логичких вредности) за свако поље се пребројавају бомбе у његовој околини. Резултати ће бити представљени посебном матрицом целих бројева, па онда исписани, мада би било могуће и исписивати их одмах након израчунавања, без памћења у посебној матрици.

Пошто обрађујемо свако поље полазне матрице, обилазак ћемо организовати на уобичајени начин, кроз две угнежђене петље. Претпоставимо да спољна, коришћењем индекса v пролази кроз све врсте, а унутрашња, коришћењем индекса k кроз све колоне текуће врсте. За свако поље (одређено индексима v и k) потребно је обићи његових 8 суседних поља (или мање, ако је поље на рубу) и пребројати бомбе на њима. За поље (v, k) суседна су поља $(v-1, k-1)$, $(v-1, k)$, $(v-1, k+1)$, $(v, k-1)$, $(v, k+1)$, $(v+1, k-1)$, $(v+1, k)$, $(v+1, k+1)$. Дакле, сва поља која се од (v, k) добијају додавањем вредности -1, 0 или 1 на било коју од координата, осим самог поља (v, k). Најлакши начин да се ова поља наброје је да се опет употребе угнежђене петље. На пример, у спољној петљи се мења увећање врсте dv од -1 до 1, а у унутрашњој увећање колоне dk од -1 до 1. Тако се обилазе поља са координатама $v' = v + dv$ и $k' = k + dk$ и за свако од њих се проверава да ли је (v', k') различито од (v, k), да ли се налази у оквиру матрице (да ли је $0 \leq v' < m$ и $0 \leq k' < n$) и да ли се на њему налази бомба. Ако су сви ти услови испуњени, бројач бомби у околини се увећава за 1.

```
# dimenzije matrice
m, n = map(int, input().split())

# ucitavamo matricu bombi
bomba = []
for v in range(m):
    bomba.append(list(map(int, input().split())))

# broj_bombi[v][k] - broj bombi u okolini polja (v, k)
broj_bombi = [[0 for k in range(n)] for v in range(m)]
for v in range(m):
```

```
    for k in range(n):
        broj_bombi[v][k] = 0;
        for dv in (-1, 0, 1):
            for dk in (-1, 0, 1):
                vv = v + dv; kk = k + dk
                if ((vv != v or kk != k) and
                    (0 <= vv and vv < m) and
                    (0 <= kk and kk < n) and
                    bomba[vv][kk] == 1):
                    broj_bombi[v][k] += 1

# ispisujemo rezultat
for v in range(m):
    for k in range(n):
        print(broj_bombi[v][k], end=" ")
    print()
```

Један начин да се избегне провера да ли се елемент у околини налази у оквиру матрице је да се матрици дода оквир који се састоји од две додатне врсте (једна горе и једна доле) и две додатне колоне (једна лево и једна десно) попуњене вредношћу `False`.

Задатак: Број правоугаоника на слици

На папиру подељеном на $n \times n$ јединичних квадратића, нацртано је неколико правоугаоника (паралелно ивицама папира) који се не додирују, осим евентуално једним теменом. Написати програм који одређује број правоугаоника на папиру.

Улаз: У првом реду стандардног улаза дата је димензија табле $n \leq 10$, а затим је у наредним редовима задата матрица која садржи јединице и нуле, тако да су јединице уписане на местима на којима су нацртани правоугаоници.

Излаз: На стандардни излаз исписати тражени број правоугаоника.

Пример

Улаз	*Излаз*
7 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1	4

Решење

Правоугаоника има тачно онолико колико има њихових горњих левих темена, па је у решењу довољно избројати само горња лева темена правоугаоника. Пошто се правоугаоници додирују највише у једном темену, елемент матрице је горње лево теме правоугаоника ако и само ако се изнад њега и лево од њега не налази елемент 1. То је могуће ако се теме које испитујемо налази у првом реду или у првој колони или ако елемент изнад и лево од њега нема вредност 1. Дакле, у имплементацији се мора водити рачуна да ли је индекс врсте $v = 0$ или индекс колоне $k = 0$, да не би дошло до прекорачења опсега у матрици. Нагласимо да се у приликом израчунавања вредности израза `v == 0 || mat[v-1][k] != 1` , у случају када је вредност промењиве `v` нула израз `mat[v-1][k]` не израчунава (због лењог израчунавања оператора `||`).

```
# ucitava matricu sa standardnog ulaza
def ucitaj():
    n = int(input())
    A = []
    for v in range(n):
        A.append(list(map(int, input().split())))
    return (A, n)
```

```
# ucitavamo matricu
(A, n) = ucitaj()

# brojac pravougaonika
broj_pravougaonika = 0
# analiziramo sve elemente matrice
for v in range(n):
    for k in range(n):
        # ako je A[v][k] gornje levo teme pravougaonika
        if (A[v][k] == 1 and
            (v == 0 or A[v-1][k] != 1) and
            (k == 0 or A[v][k-1] != 1)):
            # uvecavamo broj pravougaonika
            broj_pravougaonika += 1

# ispisujemo rezultat
print(broj_pravougaonika)
```

Провера да ли је елемент матрице горње лево теме неког правоугаоника може да се издвоји у посебну функцију.

Посебна анализа случајева би се могла избећи ако би се вештачки у матрицу додао оквир који садржи нуле (заправо, довољно је додати само горњи и леви део оквира, односно доњи и десни ако проверавамо да ли је елемент матрице доње десно теме правоугаоника), слично као што смо показали у задатку Број бомби у околини.

Задатак: Пресликавања матрице

Деца су спремала приредбу у школском дворишту. Свако је обукао костим различите боје и поређали су се у квадратну матрицу. Током тачке деца су се премештала и то на веома правилне начине. Прво су пресликали матрицу око главне дијагонале. Затим су заротирали матрицу за 90 степени удесно (у смеру казаљке на сату). Након тога су је пресликали хоризонтално и на крају су је пресликали око споредне дијагонале. Напиши програм који исписује распоред боја дечијих костима након сваког корака њихове кореографије.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($3 \leq n \leq 10$), а затим и квадратна матрица димензије n која садржи бројеве између 0 и 10 (сваки број означава једну боју костима).

Излаз: На стандардни излаз исписује се 5 матрица. Полазна, учитана и затим матрица добијена након сваке трансформације.

Пример

Улаз
```
3
1 2 3
4 5 6
7 8 9
```

Излаз
```
1 2 3
4 5 6
7 8 9

1 4 7
2 5 8
3 6 9

3 2 1
6 5 4
9 8 7

9 8 7
6 5 4
3 2 1

1 4 7
2 5 8
3 6 9
```

Решење

Размотримо шта се дешава са индексима матрице након пресликавања матрице око главне дијагонале (каже се и транспоновања матрице).

```
00 01 02 03     00 10 20 30
10 11 12 13     01 11 21 31
20 21 22 23     02 12 22 32
30 31 32 33     03 13 23 33
```

Елементу на позицији (v, k) у транспонованој матрици (матрици пресликаној око главне дијагонале) одговара елемент на позицији (k, v) оригиналне матрице. Један начин да се изврши транспоновање је да се на основу овога од полазне направи нова матрица. Међутим, транспоновање можемо једноставно извести и у месту, тј. без изградње нове матрице, тако што разменимо све елементе који се налазе у горњем троуглу изнад главне дијагонале (тј. све елементе на позицијама (v, k) за које важи да је $0 \leq v < n, k < v$), са њима одговарајућим елементима (k, v).

Размотримо шта се дешава са индексима матрице након ротације удесно.

```
00 01 02 03     30 20 10 00
10 11 12 13     31 21 11 01
20 21 22 23     32 22 12 02
30 31 32 33     33 23 13 03
```

Елементу на позицији (v, k) у ротираној матрици одговара елемент на позицији $(n - k - 1, v)$ у оригиналној матрици. На основу овога, можемо креирати нову матрицу тако што ћемо проћи кроз сваки њен елемент (v, k) (у угнежђеним петљама) и преписати одговарајући елемент из полазне матрице. Након тога, полазну матрицу можемо заменити новодобијеном (тако што препишемо све елементе).

Размотримо шта се дешава са индексима матрице након хоризонталног пресликавања.

```
00 01 02 03     30 31 32 33
10 11 12 13     20 21 22 23
20 21 22 23     10 11 12 13
30 31 32 33     00 01 02 03
```

Елемент на позицији (v, k) у новој матрици је елемент на позицији $(n - v - 1, k)$ у полазној матрици. На ову трансформацију можемо гледати и као на обртање редоследа елемената сваке колоне појединачно и можемо је реализовати техником обртања елемената низа помоћу два бројача (као у задатку Обртање низа).

На крају, размотримо и пресликавање око споредне дијагонале.

```
00 01 02 03    33 23 13 03
```

```
10 11 12 13    32 22 12 02
20 21 22 23    31 21 11 01
30 31 32 33    30 20 10 00
```

Елемент на позицији (v, k) у пресликаној матрици је елемент на позицији $(n-k-1, n-v-1)$ у оригиналној матрици. Пресликавање можемо извршити у месту, тако што ћемо сваки елемент горњег троугла изнад споредне дијагонале матрице (елемент на позицији (v, k) таквој да је $0 \leq v < n$ и $0 \leq k < n-v-1$) разменити са елементом на позицији $(n-k-1, n-v-1)$.

Сваку трансформацију реализоваћемо у склопу посебне функције. Свака функција ће мењати матрицу коју прими као аргумент.

```
# ucitava kvadratnu matricu sa standardnog ulaza - ucitava se
# prvo dimenzija, a zatim i elementi matrice
def ucitaj():
    n = int(input())
    A = []
    for v in range(n):
        A.append(list(map(int, input().split())))
    return (A, n)

# ispisuje kvadratnu matricu na standardni izlaz
def ispisi(A, n):
    for v in range(n):
        for k in range(n):
            print(A[v][k], end = " ")
        print()

# prepisuje elemente matrice B u matricu A
def prepisi(A, B, n):
    for v in range(n):
        for k in range(n):
            A[v][k] = B[v][k]

# transponuje matricu A (preslikava elemente oko glavne dijagonale)
def transponuj(A, n):
    for v in range(n):
        for k in range(v):
            A[v][k], A[k][v] = A[k][v], A[v][k]

# rotira matricu za 90 stepeni udesno
def rotiraj90(A, n):
    # rezultat upisujemo u novu, pomocnu matricu
    B = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for v in range(n):
        for k in range(n):
            B[v][k] = A[n-k-1][v]
    # prepisujemo rezultat nazad u matricu A
    prepisi(A, B, n)

# preslikava elemente matrice horizontalno (obrce redosled elemenata
# svake kolone)
def preslikaj_horizontalno(A, n):
    for k in range(n):
        vi, vj = 0, n-1
        while vi < vj:
            A[vi][k], A[vj][k] = A[vj][k], A[vi][k]
            vi += 1; vj -= 1;

# preslikava elemente matrice oko sporedne dijagonale
```

```
def preslikaj_oko_sporedne_dijagonale(A, n):
    for v in range(n):
        for k in range(n-v-1):
            A[v][k], A[n-k-1][n-v-1] = A[n-k-1][n-v-1], A[v][k]

(A, n) = ucitaj()
ispisi(A, n); print()
transponuj(A, n)
ispisi(A, n); print()
rotiraj90(A, n)
ispisi(A, n); print()
preslikaj_horizontalno(A, n)
ispisi(A, n); print()
preslikaj_oko_sporedne_dijagonale(A, n)
ispisi(A, n)
```

Користећи компрехенсију, можемо записати и знатно краће решење, засновано на истој анализи. Лоша страна овог решења је да оно у суштини користи поомоћну матрицу за сваку трансформацију (претходно решење се може дорадити да буде меморијски ефикасније, а ово не може).

Задатак: Да ли се даме нападају

Овај задатак је поновљен у циљу увежбавања различитих техника решавања. *Види текст задатка.*

Покушај да задатак урадиш коришћењем техника које се излажу у овом поглављу.

Решење

Један начин је да проверимо сваку врсту, сваку колону и сваку дијагоналу, и да избројимо колико се на њима налази дама. Чим установимо да је број дама већи од 1, бројање можемо прекинути и можемо установити да се даме нападају. Даме ћемо чувати у матрици логичких вредности димензије 8×8. Обилазак свих елемената врста и колона крајње је једноставан. Свака врста одређена је неким бројем v, тако да се провера свих врста врши у петљи у којој се v мења од 0 до 7. На сваку врсту примењује се бројање дама (бројање елемената који задовољавају неки услов одговара задатку Просек одличних) - бројач иницијализујемо на нулу, а затим у петљи пролазимо кроз елементе врсте v тако што мењамо индекс k од 0 до 7, проверавамо да ли се на пољу (v, k) налази дама, и ако се налази, увећавамо бројач. При сваком увећавању бројача проверавамо да ли му је вредност већа од 1 и ако јесте прекидамо бројање. Све провере можемо реализовати у засебним функцијама које враћају `True` ако и само ако су пронађене две даме које се нападају и у том случају је веома једноставно извршити прекид (наредбом `return True`). Провера колона је аналогна провери врста. Што се тиче провере свих дијагонала, обилазак дијагонала приказан је у задатку Највећа дијагонала. На сваку дијагоналу (прво на оне паралелне главној, а затим и на оне паралелне споредној) примењујемо поступак бројања дана и опет, ако број дама на некој дијагонали постане већи од 1, прекидамо поступак. У главном програму проверавамо да ли је нека од провера вратила `True`. Рецимо и да се, због лењог израчунавања оператора `or` којим су четири позива функција повезана, ако нека од функција врати `True`, оне након ње ни не позивају.

```
def ucitaj():
    tabla = []
    for i in range(8):
        tabla.append(list(map(int, input().split())))
    return tabla

def provera_kolona():
    for k in range(8):
        broj_dama = 0
        for v in range(8):
            if tabla[v][k]:
                broj_dama += 1
                if broj_dama > 1:
                    return True
    return False
```

```
def provera_vrsta():
    for v in range(8):
        broj_dama = 0
        for k in range(8):
            if tabla[v][k]:
                broj_dama += 1
                if broj_dama > 1:
                    return True
    return False

def provera_glavnih_dijagonala():
    for d in range(-7, 7+1):
        broj_dama = 0
        for v in range(max(0, -d), min(8, 8-d)):
            if tabla[v][v+d]:
                broj_dama += 1
                if broj_dama > 1:
                    return True
    return False

def provera_sporednih_dijagonala():
    for d in range(0, 14+1):
        broj_dama = 0
        for v in range(max(0, d-7), min(8, d+1)):
            if tabla[v][d-v]:
                broj_dama += 1
                if broj_dama > 1:
                    return True
    return False

tabla = ucitaj()
if (provera_vrsta() or
    provera_kolona() or
    provera_glavnih_dijagonala() or
    provera_sporednih_dijagonala()):
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

По истој идеји можемо решење да запишемо и краће, користећи библиотечке функције. Ово решење, иако се краће записује, може да се извршава нешто дуже (што је небитно за овако малу количину података), јер за сваку започету проверу у неком од праваца израчунава суме по свим линијама (редовима, колонама или дијагоналама) у том правцу.

Други начин да решимо задатак је да проверимо све парове дама и да за сваке две даме проверимо да ли се налазе на истој врсти, истој колони или на истој дијагонали слично као што смо то радили у задатку Да ли се две даме нападају. Положај дама можемо забележити у матрици целих бројева димензије 8×2 тако што ћемо у свакој врсти те матрице чувати број врсте и број колоне у којој се налази нека дама. Два поља (v_1, k_1) и (v_2, k_2) се налазе у истој врсти ако је $v_1 = v_2$, у истој колони ако је $k_1 = k_2$, а на истој дијагонали ако је $|v_1 - v_2| = |k_1 - k_2|$ (тј. ако је хоризонтално растојање та два поља једнако вертикалном).

```
def ucitaj():
    dame = []
    for v in range(8):
        red = list(map(int, input().split()))
        for k in range(8):
            if red[k] == 1:
                dame.append([v, k])
    return dame
```

```
def provera_parova_dama():
    for d1 in range(8):
        for d2 in range(d1+1, 8):
            if (dame[d1][0] == dame[d2][0] or
                dame[d1][1] == dame[d2][1] or
                abs(dame[d1][0] - dame[d2][0]) ==
                abs(dame[d1][1] - dame[d2][1])):
                return False
    return True

dame = ucitaj()
if provera_parova_dama():
    print("NE")
else:
    print("DA")
```

Задатак: Највећа дијагонала

Квадратна матрица садржи целе бројеве. Напиши програм који проналази највећи збир бројева на некој од дијагонала матрице (у обзир се узимају главна дијагонала, споредна дијагонала и све дијагонале њима паралелне).

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број n ($2 \leq n \leq 100$) и након тога елементи квадратне матрице димензије $n \times n$ (цели бројеви између -10 и 10).

Излаз: На стандардни излаз исписати један цео број - највећи збир елемената на некој од дијагонала.

Пример

Улаз	*Излаз*
3 10 -10 2 1 -9 3 -2 9 9	12

Решење

Посматрајмо индексе елемената у једној квадратној матрици димензије 8.

```
00 01 02 03 04 05 06 07
10 11 12 13 14 15 16 17
20 21 22 23 24 25 26 27
30 31 32 33 34 35 36 37
40 41 42 43 44 45 46 47
50 51 52 53 54 55 56 57
60 61 62 63 64 65 66 67
70 71 72 73 74 75 76 77
```

Посматрајмо њене дијагонале паралелне главној. На првој се налази само елемент $(7, 0)$. На другој, елементи $(6, 0)$ и $(7, 1)$, на трећој елементи $(5, 0)$, $(6, 1)$ и $(7, 2)$. Приметимо да је разлика индекса колоне и индекса врсте константна на свакој споредној дијагонали. На првој (која садржи само један елемент) та разлика је $-(n-1)$, на другој $-(n-2)$, а на последњој (која опет садржи само један елемент) $n-1$. Дакле, дијагонале паралелне главној су одређене целим бројевима d из интервала $[-(n-1), (n-1)]$. Одредимо индексе врста које имају елементе на дијагонали одређеној бројем d. Прво, за сваки индекс врсте v важи $0 \leq v < n$. Да би елемент врсте v припадао дијагонали одређеној бројем d мора да важи $k - v = d$. Зато је индекс колоне једнак $k = v + d$. Да би елемент припадао матрици мора да важи да је $0 \leq k < n$, тј. да је $0 \leq v + d < n$, тј. да је $-d \leq v < n - d$. Дакле, мора да важи $0 \leq v$ и мора да важи $-d \leq v$. Отуда мора да важи и $\max(0, -d) \leq v$. Слично, из $v < n$ и $v < n - d$ мора да важи и $v < \min(n, n - d)$. Дакле, обраду свих дијагонала вршићемо у петљи по d које узима вредности редом од $-(n-1)$ до $n-1$. За свако d пролазићемо кроз елементе на тој дијагонали тако што ћемо у петљи пролазити кроз врсте $\max(0, -d) \leq v < \min(n, n - d)$ и разматрати елементе са кординатама $(v, v + d)$. Израчунаваћемо збир тих елемената (применом алгоритма сабирања серије, описаног у задатку Збир n бројева). Истовремено ћемо израчунавати и највећу вредност добијеног збира (применом алгоритма одређивања максимума серије бројева, описаног у задатку Најнижа температура).

Посматрајмо и дијагонале паралелне споредној. На првој се налази елемент $(0, 0)$, на другој елементи $(0, 1)$ и $(1, 0)$, на трећој елементи $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(2, 0)$ и слично. Може се приметити да на свакој дијагонали индекси врста и колона имају константан збир и то 0, на првој дијагонали, 1 на другој, па све до $2(n-1)$ на последњој. Дакле, свака од ових дијагонала одређена је вредношћу d из интервала $[0, 2(n-1)]$. Одредимо сада индексе врста које имају елементе на дијагонали одређене бројем d. За индекс v мора да важи $0 \leq v < n$. Елемент у врсти v који припада дијагонали d мора да задовољава $v + k = d$, тј. $k = d - v$. Да би елемент припадао матрици мора да важи да је $0 \leq k < n$, тј. $0 \leq d - v < n$, тј. $d - n < v \leq d$, тј. $d - n + 1 \leq v < d + 1$. Пошто је $0 \leq v$ и $d - n + 1 \leq v$, важи да је $\max(0, d - n + 1) \leq v$. Слично, из $v < n$ и $v < d + 1$ следи да је $v < \min(n, d + 1)$. Зато се за фиксирано d елементи одговарајуће дијагонале могу добити тако што вредност v у петљи редом узима вредности од $\max(0, d - n + 1)$, па строго мање од $\min(n, d + 1)$ и тако што се за свако такво v посматра елемент $(v, d-v)$. Поново сабирамо све елементе на дијагонали (алгоритмом сабирања серије елемената), сваки збир поредимо са максималним до тада добијеним збиром и ако је збир текуће дијагонале већи од текућег максимума, ажурирамо вредност максимума (тј. примењујемо алгоритам одређивања максимума серије бројева).

На крају, након обиласка свих дијагонала, пријављујемо вредност до тада пронађеног максимума (он је тада уједно и глобални максимум).

```
import sys

n = int(input())
A = []
for v in range(n):
    A.append(list(map(int, input().split())))

# najveci zbir postavljamo na "-beskonacno"
max_zbir = -sys.maxsize - 1

# proveravamo sve glavne dijagonale
for d in range(-(n-1), (n-1) + 1):
    # izracunavamo zbir elemenata na tekucoj glavnoj dijagonali
    zbir = 0
    for v in range(max(0, -d), min(n, n-d)):
      zbir += A[v][v+d]
    # ako je zbir tekuce dijagonalne veci od najveceg dosadasnjeg
    # zbira, azuriramo najveci vidjeni zbir
    if zbir > max_zbir:
      max_zbir = zbir

# proveravamo sve sporedne dijagonale
for d in range (0, 2*(n-1)+1):
    # izracunavamo zbir elemenata na tekucoj sporednoj dijagonali
    zbir = 0
    for v in range(max(0, d-n+1), min(n, d+1)):
      zbir += A[v][d-v]
    # ako je zbir tekuce dijagonalne veci od najveceg dosadasnjeg
    # zbira, azuriramo najveci vidjeni zbir
    if zbir > max_zbir:
      max_zbir = zbir

# ispisujemo najveci zbir
print(max_zbir)
```

Решење по истој идеји, записано помоћу компрехенсије и библиотечких функција `sum` и `max`, могло би да изгледа овако:

Задатак: Спирални испис матрице

Напиши програм који исписује елементе матрице спирално, кренувши од горњег левог угла и кружећи у смеру казаљке на сату.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се димензија квадратне матрице n, а затим и елементи матрице.

Излаз: На стандардни излаз исписати низ елемената матрице који се добијају спиралним обиласком.

Пример

Улаз

```
5
1  2  3  4  5
6  7  8  9  10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 22 23 24 25
```

Излаз

```
1 2 3 4 5 10 15 20 25 24 23 22 21 16 11 6 7 8 9 14 19 18 17 12 13
```

Решење

Примера ради, посматрајмо матрицу

```
1  2  3  4  5
6  7  8  9  10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 22 23 24 25
```

Спирални испис можемо организовати тако што исписујемо један по један "прстен" матрице, од спољашњег ка унутрашњим. У нашем примеру то су

```
1  2  3  4  5       7  8  9       13
6           10      12    14
11          15      17 18 19
16          20
21 22 23 24 25
```

Сваки прстен је одређен својим редним бројем i и вредност броја i се креће од 0 за спољни прстен, па све док је мања од $n/2$. Испис елемената сваког прстена (осим последњег, једночланог) организујемо тако што испишемо његове четири ивице. Започињемо од горње. Индекс врсте свих елемената на горњој ивици прстена је i, док се индекс колоне креће од вредности i, па све док је строго мањи од $n - i$. Преостали елементи на десној ивици имају индекс колоне $n - 1 - i$, а индекс врсте им расте од $i + 1$ па док је строго мањи од $n - i$. Преостали елементи на доњој ивици имају индекс врсте $n - i - 1$, а индекс колоне им опада од вредности $n - i - 2$ па све до i (укључујући и i). На крају преостали елементи леве ивице имају индекс колоне i, док им индекс врсте опада од $n - i - 2$, па све до i (овај пут не укључучујући i).

Ако је димензија матрице n непарна, тада се у њеном центру налази последњи, једночлани прстен (заправо само један елемент) и он се исписује само тако што се тај један елемент испише (ово је специјални случај који је потребно проверити након исписа свих прстенова).

```
n = int(input())
A = []
for v in range(n):
  A.append(list(map(int, input().split())))

for i in range(n//2):
  for k in range(i, n-i):
    print(A[i][k], end=" ")
  for v in range(i+1, n-i):
    print(A[v][n-i-1], end=" ")
  for k in range(n-i-2, i-1, -1):
    print(A[n-i-1][k], end=" ")
  for v in range(n-i-2, i, -1):
    print(A[v][i], end=" ")
```

```
if n % 2 != 0:
     print(A[n//2][n//2], end = " ")

print()
```

Један начин да организујемо спирални испис је да у сваком тренутку памтимо четири промењиве `gore`, `dole`, `levo` и `desno` које одређују прстен матрице који тренутно исписујемо. Иницијално, промењиве `gore` и `levo` постављамо на нулу, а `dole` и `desno` на $n-1$. Након тога, исписујемо горњи ред прстена тако што исписујемо све елементе у врсти `gore`, док се колона мења од `levo` до `desno`. Након тога, увећавамо вредност промењиве `gore`. Затим исписујемо преостале елементе десне ивице тако што исписујемо елементе у колони `desno` за вредности врсте од `gore` до `dole`. Након тога, умањујемо вредност промењиве `desno`. Затим исписујемо преостале елементе доње ивице тако што исписујемо елементе у врсти `dole`, док се индекс колоне мења од `desno` и опада до `levo`. Након тога, умањујемо вредност промењиве `dole`. На крају, елементе леве колоне исписујемо тако што исписујемо елементе у колони `levo` док индекс врсте опада од `dole` па до `gore`. Након тога увећавамо вредност промењиве `levo` и поступак понављамо из почетка. Након сваког увећавања промењиве `gore` и умањивања промењиве `dole` проверавамо да ли је вредност `gore` постала строго већа од вредности `dole` - ако јесте, прекидамо поступак. Аналогно, након сваког увећавања промењиве `levo` и умањивања промењиве `desno` проверавамо да ли је вредност `levo` постала строго већа од вредности `desno` - ако јесте, прекидамо поступак.

```
n = int(input())
A = []
for v in range(n):
  A.append(list(map(int, input().split())))

gore = 0; dole = n-1; levo = 0; desno = n-1
while True:
  for k in range(levo, desno+1):
    print(A[gore][k], end=" ")
  gore += 1
  if gore > dole:
    break
  for v in range(gore, dole+1):
    print(A[v][desno], end=" ")
  desno -= 1
  if desno < levo:
    break
  for k in range(desno, levo-1, -1):
    print(A[dole][k], end=" ")
  dole -= 1
  if dole < gore:
    break
  for v in range(dole, gore-1, -1):
    print(A[v][levo], end=" ")
  levo += 1
  if levo > desno:
    break

print()
```

Задатак: Множење матрица

Јовани је рођендан и одлучила је да направи торту да почасти своје другарице и другаре. Она зна рецепте за t различитих торти. У сваку торту иде s различитих састојака (за сваку торту позната је количина сваког од тих састојака). Јована ће све ствари набавити у једној од p продавница. За сваку продавницу познате су цене сваког од тих састојака. Напиши програм који помаже Јовани да одреди коју торту да прави и у којој продавници да купује састојке да би јој остало што више пара за екскурзију.

Улаз: Са стандардног улаза уносе се бројеви t, s и p (сви између 2 и 10), а затим и две матрице. Прва,

димензије $t \times s$ одређује количину састојака за сваку од торти (количина је цео број између 1 и 3), а друга, димензије $s \times p$ одређује цену сваког састојка у свакој од продавница (цена је цео број између 100 и 300).

Излаз: На стандардни излаз исписати три цела броја - редни број торте и редни број продавнице (оба се броје од 0), као и укупну цену најјефтиније торте.

Пример

Улаз	*Излаз*

`3 4 2`
`2 1 3 2`
`3 2 2 1`
`2 1 2 3`
`250 170`
`160 120`
`135 142`
`145 155`
	`1 1 1189`

Решење

Размотримо податке дате у примеру.

```
2 1 3 2   250 170
3 2 2 1   160 120
2 1 2 3   135 142
          145 155
```

Израчунајмо цену прве торте, ако састојке купујемо у првој продавници. Потребно је две јединице првог састојка који кошта 250 динара, једна јединица другог састојка који кошта 160 динара, три јединице трећег састојка који кошта 135 динара и две јединице четвртог састојка који кошта 145 динара. Дакле, укупна цена те торте је $2 \cdot 250 + 1 \cdot 160 + 3 \cdot 135 + 2 \cdot 145 = 1355$. Дакле, да бисмо израчунали цену прве торте, потребно је било да помножимо прву врсту прве матрице, са првом колоном друге матрице (види задатак Скаларни производ). Слично, да бисмо израчунали цену торте са редним бројем t у продавници са редним бројем p потребно је да помножимо врсту са индексом t у првој матрици са колоном са редним бројем p у другој матрици. Све тако добијене цене можемо сложити у нову матрицу која ће бити димензије $t \times p$. За матрице из примера добијамо резултат

```
1355 1196
1485 1189
1365 1209
```

Да бисмо израчунали ову матрицу пролазимо кроз све њене елементе (у две угнежђене петље - једној која одређује њену врсту t и креће се од 0, па док је мања од T и другој која одређује њену колону p и креће се од 0, па док је мања од P). У телу тих петљи израчунавамо производ врсте t прве матрице и колоне p друге матрице тако што тај производ (елемент на позицији (t, p) резултујуће матрице) иницијализујемо на нулу, затим у петљи пролазимо кроз све састојке тј. пуштамо да се променљива s мења од 0, па док је мања од S и у сваком кораку производ увећавамо за производ елемента на позицији (t, s) прве матрице (то је количина састојка s у торти t) и елемента на позицији (s, p) у другој матрици (то је цена састојка s у продавници p). Добијена матрица се назива *производ матрица* и операција множења матрица се дефинише баш на начин који смо приказали у овом задатку.

Након одређивања производа, тј. цена свих торти у свим продавницама, потребно је одредити позицију и вредност најјефтиније од њих. То се ради једноставном модификацијом алгоритма за одређивање позиције минимума (види задатак Редни број максимума) - позицију минимума иницијализујемо на $(0, 0)$, затим пролазимо кроз све елементе матрице (помоћу две угнежђене петље), поредимо текући елемент са минималним и ако је мањи од минималног, ажурирамо позицију минималног елемента на текућу позицију - нагласимо да није потребно посебно памтити вредност минималног јер се на основу његове позиције у матрици лако може прочитати његова вредност.

```
# odredjuje se proizvod matrica ts dimenzije T puta S i sp dimenzije
# T puta P i rezultat se smesta u matricu tp dimenzije T puta P
def mnoziMatrice(ts, sp, T, S, P):
  tp = []
  for t in range(T):
    tp.append([0] * P)
```

```
    for p in range(P):
      # cenu torte t u prodavnici p uvecavamo za cenu svakog sastojka
      for s in range(S):
        tp[t][p] += ts[t][s] * sp[s][p]
  return tp

# odredjujemo poziciju (tMin, pMin) minimalnog elementa matrice tp
# dimenzija T puta P
def nadjiMinimum(tp, T, P):
  tMin = 0; pMin = 0
  for t in range(T):
      for p in range(P):
          if tp[t][p] < tp[tMin][pMin]:
              tMin = t; pMin = p
  return (tMin, pMin)

# ucitava matricu sa standardnog ulaza
def ucitaj(m, n):
    A = []
    for v in range(m):
      A.append(tuple(map(int, input().split())))
    return A


# učitavamo broj torti, sastojaka i prodavnica
(T, S, P) = map(int, input().split())
# kolicina sastojaka za svaku tortu
ts = ucitaj(T, S)
# cena sastojaka u svakoj prodavnici
sp = ucitaj(S, P)
# cena svake torte u svakoj prodavnici
tp = mnoziMatrice(ts, sp, T, S, P)
# najjeftinija torta
(tMin, pMin) = nadjiMinimum(tp, T, P)
print(tMin, pMin, tp[tMin][pMin])
```

Нагласимо и да се задатак могао решити без памћења целе резултујуће матрице, тако што би се након одређивања сваког њеног елемента он поредио са вредношћу текућег минимума (који би у том случају требало памтити).

```
import sys

# ucitava matricu sa standardnog ulaza
def ucitaj(m, n):
    A = []
    for v in range(m):
      A.append(tuple(map(int, input().split())))
    return A


# učitavamo broj torti, sastojaka i prodavnica
(T, S, P) = map(int, input().split())
# kolicina sastojaka za svaku tortu
ts = ucitaj(T, S)
# cena sastojaka u svakoj prodavnici
sp = ucitaj(S, P)

tMin = 0; pMin = 0
minCena = sys.maxsize
```

```
for t in range(T):
  for p in range(P):
    # cena torte t u prodavnici p
    cena = 0
    # sabiramo cene svih sastojaka
    for s in range(S):
      cena += ts[t][s] * sp[s][p]
    # ako je tekuca cena jeftinija od dosada najjeftinije
    if cena < minCena:
      # azuriramo najjeftiniju cenu i njenu poziciju
      minCena = cena
      tMin = t; pMin = p

print(tMin, pMin, minCena)
```

Задатак: Релација зависности

На факултету постоје зависности између испита који се полажу. На пример, да би се полагао испит "Програмирање 2", претходно је неопходно да је положен испит "Програмирање 1". Зависности су задате матрицом логичких вредности која представља једну релацију. Напиши програм који проверава да ли су испуњени следећи услови:

- релација је антирефлексивна тј. не постоји ни један предмет који зависи сам од себе,
- релација је антисиметрична тј. не постоје два предмета која међусобно зависе један од другог,
- релација је транзитивна тј. ако један предмет зависи од другог, а тај други зависи од трећег, онда је неопходно да и први предмет зависи од трећег.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број предмета n ($5 \leq n \leq 10$), а затим матрица димензије $n \times n$ која садржи само нуле и јединице - јединица у врсти v и колони k означава да предмет са редним бројем v зависи од предмета са редним бројем k.

Излаз: На стандардни излаз исписати `DA` ако матрица испуњава све задате услове тј. `NE` ако нарушава било који од њих.

Пример

Улаз	*Излаз*
6 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	DA

Решење

Релација је антирефлексивна ако на дијагонали матрице не постоји ни једна јединица тј. ниједна вредност `True` ако се за елементе матрице користи логички тип. Примењујемо, дакле, алгоритам линеарне претраге (види задатак Негативан број) који се најједноставније имплементира у склопу посебне функције, пролазимо кроз дијагоналне елементе (то су они који имају индексе облика (i, i) за вредности i од 0 па док је i строго мање од n, проверавамо да ли је на дијагонали `True` и ако јесте, прекидамо извршавање функције враћајући вредност `False` (матрица није антирефлексивна). Ако се пролазак кроз серију дијагоналних елемената заврши, то значи да није пронађена ниједна вредност `True` на дијагонали, тако да након петље, на крају функције можемо да вратимо вредност `True` (матрица јесте антирефлексивна).

Антисиметричност проверавамо на сличан начин. Опет алгоритмом претраге проверавамо да ли постоји неки пар различитих индекса (v, k) такав да и на позицији (v, k) и на позицији (k, v) у матрици стоји вредност `True`. Довољно је претражити само доњи (или само горњи троугао), јер ако постоји таква вредност са $k > v$, тада ће постојати таква вредност и за $v > k$.

На крају, транзитивност проверавамо тако што за сваки пар тројки (i, j, k) проверавамо да ли је нарушен услов да ако је на позицији (i, j) вредност `True` и на позицији (j, k) вредност `True`, тада је и на позицији (i, j)

вредност `True`. Дакле, опет у склопу посебне функције вршимо линарну претрагу, помоћу три угнежђене петље набрајамо све тројке (i, j, k) и проверавамо да ли је у матрици на позицијама (i, j) и (j, k) вредност `True`, а на позицији (i, j) вредност `False` - ако јесте враћамо вредност `False` (релација није транзитивна). На крају, ако прођемо све тројке, враћамо вредност `True` (релација јесте транзитивна јер нисмо наишли ни на један елемент који нарушава транзитивност).

```
# provera da li je matrica A dimenzije n antisimetricna
def je_antisimetricna(A, n):
  # trazimo da li postoji par indeksa (v, k) takav da je A[v][k] =
  # true i A[k][v] = true
  for v in range(n):
    for k in range(n):
      if A[v][k] and A[k][v]:
        return False
  return True

# provera da li je matrica A dimenzije n antirefleksivna
def je_antirefleksivna(A, n):
  # trazimo da li na dijagonali postoji vrednost true
  for i in range(n):
    if A[i][i]:
      return False
  return True

# provera da li je matrica A dimenzije n tranzitivna
def je_tranzitivna(A, n):
  # trazimo da li postoji trojka (i, j, k) takva da je
  # A[i][j] = true, A[j][k] = true, ali da ne vazi da je A[i][k] = true
  for i in range(n):
    for j in range(n):
      for k in range(n):
        if A[i][j] and A[j][k] and not(A[i][k]):
          return False
  return True

# ucitavamo matricu
n = int(input())
A = []
for v in range(n):
    A.append(list(map(int, input().split())))

# proveravamo uslove i ispisujemo rezultat
if (je_antisimetricna(A, n) and
    je_antirefleksivna(A, n) and
    je_tranzitivna(A, n)):
    print("DA")
else:
    print("NE")
```

Задатак: Преседање

Дата је квадратна матрица A димензије N, која представља директне авионске везе између N градова. Елемент $a_{i,j}$ је једнак један ако постоји директан лет из града i за град j, а нула иначе.

Одредити и исписати матрицу исте димензије, која приказује везе између истих градова уз највише једно преседање. Сматрати да је сваки град у директној вези са самим собом, без обзира на улазне вредности.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налази се број N, број градова ($1 \leq N \leq 10$). У наредних N редова налази се низ од N нула или јединица. Јединица у реду i на месту j значи да постоји директан лет од града i до града j, а нула да не постоји.

Излаз: На стандардни излаз исписати N редова, у сваком по једну врсту резултујуће матрице. Елемент на позицији (i, j) резултујуће матрице једнак је 1 ако постоји директна веза, или веза са једним преседањем између одговарајућих градова, а 0 иначе.

Пример

Улаз	*Излаз*
`4`	`1 1 1 1`
`0 1 0 1`	`1 1 0 1`
`1 0 0 0`	`1 1 1 1`
`1 1 0 0`	`1 1 1 1`
`0 0 1 0`	

Објашњење

Из првог у трећи град се стиже преко четвртог града.

Из другог у четврти град се стиже преко првог града.

Из трећег у четврти град се стиже преко првог града.

Из четвртог у први град се стиже преко трећег града.

Из четвртог у други град се стиже преко трећег града.

Задатак: Особине релације

Релација на скупу од N елемената може се представити квадратном логичком матрицом величине $N \times N$.

Испитати да ли је релација дата матрицом

- рефлексивна
- симетрична
- антисиметрична
- транзитивна

Напомена

Релација ρ је рефлексивна на скупу S ако и само ако је $(\forall x \in S)(x \rho x)$, тј. ако и само ако је сваки елемент у релацији са собом. На пример, релација "бити подударан" је рефлексивна на скупу тачака у равни, а релација "бити мањи" није рефлексивна на скупу целих бројева.

Релација ρ је симетрична на скупу S ако и само ако је $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x \rho y \iff y \rho x)$, тј. ако и само ако редослед елемената у релацији није битан. На пример, релација "бити исте парности" је симетрична на скупу целих бројева, а релација "бити мањи" није симетрична на скупу целих бројева.

Релација ρ је антисиметрична на скупу S ако и само ако је $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x \rho y \wedge y \rho x \implies x = y)$, тј. ако и само не постоје два различита елемента који су међусобно у релацији у оба смера. На пример, релација "бити дељив" је антисиметрична на скупу природних бројева, а релација "бити исте парности" није антисиметрична на скупу целих бројева.

Релација ρ је транзитивна на скупу S ако и само ако је $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(\forall z \in S)(x \rho y \wedge y \rho z \implies x \rho z)$, тј. ако и само кад год је један леемент у релацији са другим, а други са трећим, онда је и први елемент у релацији са трећим. На пример, релација "бити дељив" је транзитивна на скупу природних бројева, а релација "бити бољи" није транзитивна на скупу $\{, , \}$ у познатој игри (папир је бољи од камена а камен од маказа, али папир није бољи од маказа).

Улаз: У првом реду стандардног улаза налази се број N, број елемената скупа ($1 \leq N \leq 10$). У наредних N редова налази се низ од N нула или јединица. Нула у реду i на месту j значи да i-ти елемент није у релацији са j-тим, а јединица значи да јесте.

Излаз: У свакој од 4 линије излаз треба исписати реч `da` или `ne`. Исписане речи су редом одговори на питања да ли је релација која је задата матрицом рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна.

Пример

Улаз	*Излаз*
`3`	`da`
`1 1 0`	`ne`
`1 1 0`	`ne`
`1 1 1`	`da`

Задатак: Асоцијативност

Нека операција $\star$ задата је на скупу целих бројева од 0 до $n-1$ помоћу матрице A димензија $n \times n$, тако да је $i \star j = A_{i,j}$, при чему су индекси (а такође и елементи матрице, тј. резултати операције) цели бројеви из интервала $[0, n-1]$.

Написати програм који учитава квадратну матрицу и проверава да ли је операција дата том матрицом асоцијативна, тј. да ли за свако i, j, k из интервала $[0, n-1]$ важи: $(i \star j) \star k = i \star (j \star k)$.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налази се број n, број елемената скупа на коме је дефинисана операција ($1 \leq n \leq 10$). У наредних n редова налази се по један низ од n целих бројева из интервала $[0, n-1]$, раздвојених по једним размаком.

Излаз: На стандардни излаз исписати само реч `da` или `ne` (`da` ако је операција асоцијативна, а `ne` ако није).

Пример

Улаз	*Излаз*
`4`	`da`
`2 3 0 1`	
`3 0 1 2`	
`0 1 2 3`	
`1 2 3 0`	

Задатак: Гарантовани износ

Два играча играју следећу игру: из дате матрице играч R бира ред а играч K колону и након тога играч R плаћа играчу K своту која је у пресеку изабране врсте и колоне (ако је свота негативна, играч K плаћа играчу R апсолутну вредност своте).

Који је најповољнији исход који може гарантовати сваки од играча, ако мора први да бира?

Улаз: У првом реду стандардног улаза су два природна броја m и n, број врста и број колона матрице ($1 \leq m \leq 10, 1 \leq n \leq 10$). У следећих m редова налази се по n целих бројева $a_{i,j}, j = 0, 1 \ldots n-1$, раздвојених по једним размаком, који представљају један ред матрице (за сваки елемент матрице важи $-10^9 \leq a_{i,j} \leq 10^9$).

Излаз: У првом реду исписати своту коју може да гарантује играч R, као најповољнију за себе.

У другом реду исписати своту коју може да гарантује играч K, као најповољнију за себе.

Пример

Улаз	*Излаз*
`2 3`	`1`
`-2 1 0`	`0`
`0 -1 2`	

Објашњење

Ако први бира играч R, он може да гарантује да неће платити више од 1 избором горње врсте.

Ако први бира играч K, он може да гарантује да неће примити мање од 0 избором последње колоне.

Задатак: Осигурање

Компанија која се бави осигурањем покрива D врста штетних догађаја, а исплаћује осигуранику S_j динара у случају j-те врсте штетног догађаја, $0 \leq j < D$. Осим тога, за сваког од K клијената (осигураника) процењена је вероватноћа сваке врсте штетног догађаја $P_{i,j}, 0 \leq i < K, 0 \leq j < D$ (i је редни број клијента, а j редни број врсте штетног догађаја).

Претпостављајући да штетни догађаји наступају независно један од другог, компанија израчунава очекивану исплату клијенту i као

$$\sum_{j=0}^{D-1} P_{i,j}S_j = P_{i,0}S_0 + P_{i,1}S_1 + ... + P_{i,D-1}S_{D-1}.$$

Одредити редни број i оног осигураника који је најризичнији за осигуравајућу компанију, то јест оно i за које је наведена сума највећа. У случају да има више таквих клијената, одредити најмањи од њихових редних бројева.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налазе се бројеви D и K, број врста штетних догађаја и број клијената ($1 \leq D \leq 10, 1 \leq K \leq 20$). У следећем реду је D реалних позитивних бројева раздвојених по једним размаком, који представљају своте које се исплаћују за сваки од штетних догађаја. У сваком од наредних K редова се налази D реалних бројева из интервала $[0, 1]$ раздвојених по једном размаком, који представљају редом вероватноће штетних догађаја за једног клијента.

Излаз: Исписати само један цео број, (најмањи) редни број клијента за ког је очекивана исплата максимална.

Пример

Улаз	*Излаз*

`3 5`
`50000 15500 100000`
`0.002 0.019 0.019`
`0.003 0.021 0.013`
`0.001 0.016 0.017`
`0.001 0.014 0.021`
`0.002 0.022 0.018`
	`3`

Објашњење

Очекиване исплате штете за клијенте су редом 2294.5, 1775.5, 1998, 2367, 2241. Највећа од њих је 2367, која се добија за клијента са редним бројем 3.

Задатак: Магичан квадрат

Матрица $n \times n$ целих бројева је магичан квадрат ако су збирови свих врста и свих колона исти. Магичан квадрат је јак магичан квадрат ако су елементи матрице сви бројеви из скупа $\{1, 2, ..., n^2\}$. Написати програм који проверава да ли је дата матрица магичан квадрат, и ако јесте, да ли је јак магичан квадрат.

Улаз: У првом реду стандардног улаза је природан број n, који представља димензију матрице ($2 \leq n \leq 10$).

У следећих n редова налази се по n целих бројева, раздвојених по једним размаком, који представљају по један ред матрице. За сваки елемент матрице важи $1 \leq a_{i,j} \leq n^2$).

Излаз: На стандардни излаз исписати један од текстова `"nije magican"`, `"magican"` или `"jak magican"` (без наводника).

Пример

Улаз	*Излаз*

`4`
`1 15 14 4`
`12 6 7 9`
`8 10 11 5`
`13 3 2 16`
	`jak magican`

Задатак: Матрица 1248

Дата је матрица формата $V \times K$ попуњена на неки начин бројевима 1, 2, 4, 8. Одредити број подматрица формата 2×2 код којих су сви елементи различити.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налазе се бројеви V и K, који представљају димензије матрице ($2 \leq V \leq 10, 2 \leq K \leq 10$). У сваком од наредних V редова се налази K бројева из скупа $\{1, 2, 4, 8\}$ раздвојених по једним размаком, који представљају један ред матрице.

Излаз: Исписати само један цео број, број тражених подматрица.

Пример

Улаз	*Излаз*

`3 4`
`1 2 1 4`
`4 8 8 2`
`1 2 8 4`
	`3`

Задатак: Премештаљка

Премештаљка има облик матрице од V врста и K колона. Једно поље премештаљке је празно, а на осталим местима су плочице са бројевима од 1 до $m \cdot n - 1$. Плочица поред празне позиције може са њом да замени место. Померање неке плочице на лево, на десно, навише, односно наниже означаваћемо редом са `L`, `D`, `V`, `N`.

За дате димензије матрице, почетни распоред бројева (празнина је означена нулом) и низ потеза претстављен словима `L`, `D`, `V`, `N`, приказати распоред бројева након овог низа потеза.

Улаз: У првом реду стандардног улаза налазе се бројеви V и K, димензије матрице ($2 \leq V \leq 10$, $2 \leq V \leq 10$). У наредних K редова налази се низ од V бројева из опсега $[0, m \cdot n - 1]$ раздвојених по једним ртазмаком, тако да се сваки од тих бројева појављује по једном у матрици. Након тога, у последњем реду је ниска слова из скупа $\{L, D, V, N\}$, дужине не веће од 20.

Подаци су такви да је премештања увек могуће извести.

Излаз: У V редова исписати редом врсте матрице бројева која се добија када се на датој матрици изведу премештања задата ниском слова.

Пример

Улаз	*Излаз*

`3 4`
`1 2 3 4`
`5 6 7 8`
`9 10 11 0`
`DNDVL`
	`1 2 3 4`
	`5 10 6 8`
	`9 7 0 11`

Задатак: Троуглови и широка дијагонала

Ученици три одељења су села на столице у биоскопској сали квадратног облика. Ученици једног одељења су попунили места на главној дијагонали сале и неколико дијагонала уз њу, ученици другог одељења су попунили горњи, а трећег одељења доњи троугао сале. На пример, ако је димензија сале 7, а ако су ученици првог одељења сели на две дијагонале уз главну, онда је распоред седења следећи:

```
1112222
1111222
1111122
3111112
3311111
3331111
3333111
```

Позната је висина сваког ученика. Напиши програм који одређује просечну висину ученика сваког одељења.

Улаз: Са стандардног улаза учитава се број n који представља димензију сале ($5 \leq n \leq 10$), затим, квадратна матрица димензије $n \times n$ која садржи висине ученика (реалне бројеве између 1.1 и 1.80) и на крају, у следећем реду, број m који одређује број дијагонала око главне на којима су распоређени ученици првог одељења ($0 \leq m \leq 3$).

Излаз: На стандардни излаз исписати просечну висину ученика одељења 1, одељења 2 и одељења 3 (сваки број у посебном реду, заокружен на две децимале).

Пример

Улаз	*Излаз*
7 1.31 1.58 1.13 1.49 1.70 1.17 1.36 1.39 1.78 1.42 1.38 1.42 1.54 1.68 1.28 1.10 1.42 1.52 1.79 1.19 1.33 1.18 1.44 1.33 1.23 1.55 1.33 1.59 1.24 1.79 1.17 1.33 1.76 1.19 1.44 1.63 1.50 1.41 1.11 1.56 1.61 1.80 1.51 1.76 1.48 1.33 1.74 1.30 1.55 2	1.43 1.45 1.48

Задатак: Врхови планине

Планинарска експедиција се кретала правоугаоним тереном и у правилним интервалима мерила је надморску висину. Претпостављамо да су прикупљене висине у матрици димензија $m \times n$. Када се налазе у некој тачки, планинари могу да гледају на исток, запад, север и југ, али и на североисток, северозапад, југоисток и југозапад. У сваком од тих 8 смерова планинари могу да виде неколико врхова. Тачка се сматра видљивом, ако се испред ње налазе само тачке које имају строго мању надморску висину од ње (или ако испред ње нема других тачака).

Улаз: Опис улазних података.

Излаз: Опис излазних података.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 5 3 8 5 4 2 4 1 7 6 5 2 1 4 8 9 3 3 7 5 2 1 2	11

Задатак: Турнир

Током једне кошаркашке сезоне неки тимови су се састајали више пута. Ако је познат резултат сваког њиховог сусрета, напиши програм који одређује укупан резултат свих њихових сусрета након те сезоне.

Улаз: У првом реду стандардног улаза уноси се укупан број одиграних утакмица n ($1 \leq n \leq 100$). У следећих n редова уносе се по 4 ненегативна цела броја p, q, r, s који описују једну утакмицу, тако да су p и q ($1 \leq p, q \leq 10$) редни бројеви кошаркашких тимова који су одиграли ту утакмицу с резултатом $r : s$ ($0 \leq r, s \leq 150$) тј. тим p је дао r кошева, док је тим q дао s кошева. Након тога се уноси природни број m ($1 \leq m \leq 20$), а потом m парова природних бројева p и p ($1 \leq p, q \leq 10$).

Излаз: За сваки пар тимова p и q, у посебној линији испиши колико укупно кошева је тим p дао тиму q и колико је тим q дао тиму p, раздвојене двотачком.

Пример

Улаз	*Излаз*
5 1 2 15 70 2 3 90 88 1 2 23 9 3 1 88 86 2 3 42 50 2 1 2 3 2	38:79 138:132

Задатак: Потез у игри 2048

На интернету је веома популарна игра 2048. На квадратој табли неке плочице садрже степене броја 2, а нека поља су празна. Играч игра потез тако што се одлучи за један смер (налево, надесно, наниже или навише) и затим помера све плочице преко празних поља у том смеру, колико год је то могуће. При том се две плочице на којима пише исти број, а које су које су суседне (или које постају суседне након померања плочица по празним пољима) спајају у једну плочицу на којој је дупло већи број (спајање се врши у правцу кретања). Плочице настале спајањем се не спајају даље током истог потеза. Слободно играјте мало игрицу да бисте схватили правила.

Улаз: Са стандардног улаза се уноси број n ($1 \leq n \leq 10$), а затим и матрица димензије $n \times n$ на којој су празна поља означена вредношћу 0, а плочице степенима двојке. У наредном реду се налази један карактер који одређује смер померања (`L` - налево, `D` - надесно, `V` - навише, `N` - наниже).

Излаз: На стандардни излаз исписати матрицу која представља стање табле за игру након одиграног потеза.

Пример 1

Улаз
```
4
0 0 0 2
0 0 2 0
0 2 0 0
2 0 0 0
N
```
Излаз
```
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
2 2 2 2
```

Пример 2

Улаз
```
4
0 0 2 2
0 2 0 2
2 0 0 2
2 2 2 2
D
```
Излаз
```
0 0 0 4
0 0 0 4
0 0 0 4
0 0 4 4
```

Пример 3

Улаз
```
4
1 2 4 8
1 2 4 0
1 2 4 0
0 1 2 4
1 2 4 4
L
```
Излаз
```
1 2 4 8
1 2 4 0
1 2 4 0
1 2 8 0
```

Пример 4

Улаз
```
4
0 0 0 2
0 0 2 2
0 2 2 2
2 2 2 2
V
```
Излаз
```
2 4 4 4
0 0 2 4
0 0 0 0
0 0 0 0
```

Задатак: Сортирање по просеку

Наставник је записао табелу са закључним оценама ученика. Напиши програм који сортира ученике по просечној оцени, нерастуће. Ако два ученика имају исту просечну оцену они треба да остану у редоследу у ком су били на почетку.

Улаз: Са стандардног улаза се учитава број ученика u ($5 \leq u \leq 50000$), затим број оцена o ($5 \leq o \leq 100$) и након тога у u наредних линија оцене за сваког ученика (o оцена раздвојене размацима).

Излаз: На станардном излазу исписати соритране оцене (у истом формату у којем су и унете).

Пример

Улаз
```
6 5
3 5 5 4 2
5 4 2 2 5
5 5 5 4 5
3 3 3 2 1
4 2 5 1 3
5 4 5 5 5
```
Излаз
```
5 5 5 4 5
5 4 5 5 5
3 5 5 4 2
5 4 2 2 5
4 2 5 1 3
3 3 3 2 1
```

6.4.3 Разуђени низови

Задатак: Електронски дневник

Наставница жели да оцене својих ученика препише у дневник, али је приметила да се редослед ученика у свесци и дневнику не поклапа. Напиши програм који исписује све оцене у жељеном редоследу.

Улаз: Прва линија стандардног улаза садржи број ученика n (природан број између 1 и 30). Наредних n линија садрже оцене ученика (свака линија садржи између два и десет бројева од 1 до 5, раздвојене размацима).

Наредних n линија описују редослед у коме је потребно исписати оцене (у свакој линији налази се један број од 1 до n и бројеви у свих n линија су различити).

Излаз: На стандардни излаз исписати све оцене, а затим и просек оцена заокружен на две децимале у редоследу који је задат на улазу.

Пример

Улаз	*Излаз*
4 5 4 5 4 4 4 2 3 3 4 3 5 4 2 2 3 4 1 2	3 3 4 3.33 3 5 4 2 2 3.20 5 4 5 4.67 4 4 4 2 3.50

Решење

Пошто сваки ученик има различити број оцена, а све оцене морамо истовремено складиштити због каснијег исписа, употребићемо разуђен низ.

Просек низа оцена можемо рачунати на исти начин као у задатку Средине.

```
def prosek(ocene):
    return sum(ocene) / len(ocene)

broj_ucenika = int(input())
ocene = []
for i in range(broj_ucenika):
    ocene.append(list(map(int, input().split())))

for i in range(broj_ucenika):
    rbr = int(input())
    for ocena in ocene[rbr-1]:
        print(ocena, end=" ")
    print(format(prosek(ocene[rbr-1]), '.2f'))
```

Ова збирка се бави елементарним алгоритмима и погодна је за почетни ниво учења програмирања у гимназијама, стручним школама и на факултетима, као и почетни ниво припреме за такмичења из програмирања.

Збирка представља штампани извод шире збирке доступне онлајн, на порталу petlja.org. У онлајн издању збирке омогућено је аутоматско тестирање решења за сваки задатак (подаци се у свим задацима учитавају са стандардног улаза и исписују се на стандардни излаз).

По завршетку збирке, читалац може наставити да се бави програмирањем на различите начине. Један од могућих наставака је изучавање сложености алгоритама и налажење ефикасних решења проблема. Тим темама је посвећен други том ове збирке, доступан на порталу petlja.org